



وزارة التربية والتعليم

إدارة الإشراف والتدريب التربوي

ملزمة الرياضيات للصفّ العاشر الأساسي

مرحلة التعافي ٢



وزارة التربية والتعليم

إدارة الإشراف والتدريب التربوي

ملزمة الرياضيات للصفّ العاشر الأساسي

مرحلة التعافي ٢

المقدمة

يسرّنا أن نضع بين أيدي أبنائنا الطّلبة هذه الملزمة بوصفها ملخصاً لأهمّ الأفكار والمفاهيم الرّياضيّة البنائيّة للطّلبة في الصّف العاشر الأساسيّ، حيث تحوي هذه الملزمة الأمثلة مع شروحات الحلّ وتدريب مشابه، ليجرّب الطّالب ويقيّم نفسه، وأضفنا إثراء في نهاية كلّ موضوع، لتنمية مهارات التّفكير العليا وتطوير الفهم لدى الطّالب.

وتتضمّن هذه الملزمة الموضوعات الآتية:

١. النّسب المثلثيّة وحلّ المثلثات:

”الوضع القياسيّ للزاوية، والنّسب المثلثيّة، والنّسب المثلثيّة للزوايا ضمن دورة كاملة“.

٢. تطبيقات المثلث:

”مساحة المثلث، وقانون الجيوب، وقانون جيوب التّمام“.

٣. الهندسة التحليليّة:

”المستقيّات المتوازية والمتعامدة، والبعد بين نقطة ومستقيم، وخصائص المثلث“.

٤. الهندسة التحليليّة والفضائيّة:

»خصائص متوازي الأضلاع، وأوضاع المستقيّات والمستويات في الفضاء«.

٥. الإحصاء والاحتمالات:

”مقاييس التّشتت، وقوانين الاحتمالات“.

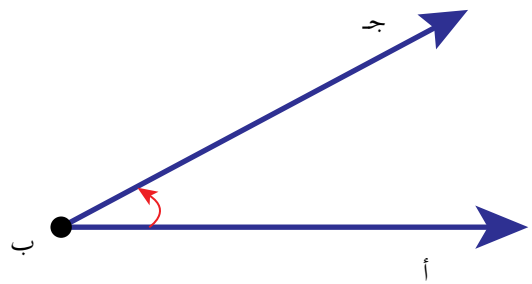
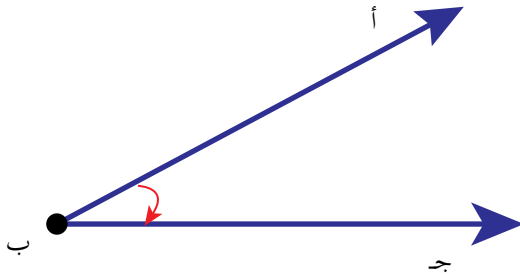
٦. الرّياضيات الماليّة:

»تبديل العملة، والعمولة والرّبح والتّخفيض«.

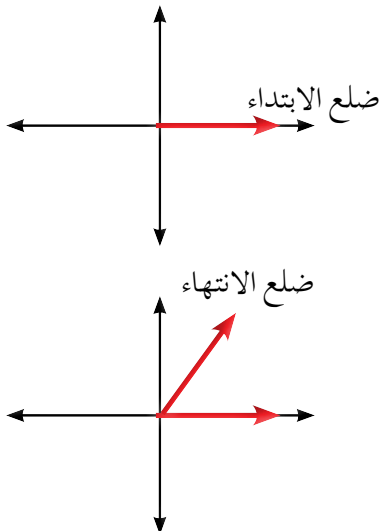
الفصل الأول: الزوايا والنسب المثلثية

أراد طالب رسم زاوية قياسها 135° بحيث يكون رأسها في نقطة الأصل، وينطبق ضلع ابتدائها على محور السينات الموجب، كيف يقوم بذلك؟
أولاً: الوضع القياسي للزاوية:

يمكن تحديد الزاوية في القياس الموجب أو السالب حسب حركة القوس:
 دوران مع عقارب الساعة دوران عكس عقارب الساعة
 القياس سالب القياس موجب



نسَمي الضلع ب أ ضلع الابتداء للزاوية، ويكون منطبقاً على الجزء الموجب لمحور السينات.



ونسَمي الضلع ب ج ضلع الانتهاء للزاوية.

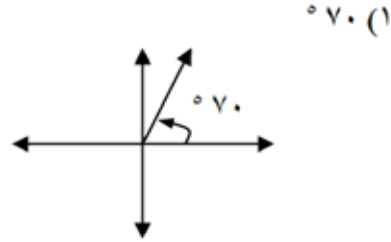
مثال ١:

ارسم في الوضع القياسي للزوايا الآتية، ثم حدّد الربع أو المحور الذي يقع فيه ضلع الانتهاء.

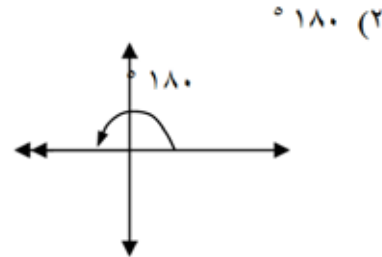
(١) 70° (٢) 180° (٣) 240°

الحلّ

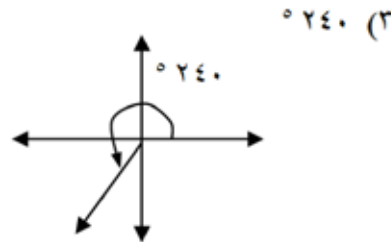
نستخدم المنقلة لرسم الزاوية 70° .
ضلع الانتهاء يقع في الربع الأول.



نستخدم المنقلة لرسم الزاوية 180° .
ضلع الانتهاء ينطبق على الجزء السالب لمحور السينات.



نستخدم المنقلة لرسم الزاوية 240° .
نلاحظ المنقلة 180° ونكمل من نهايتها 60° .
ضلع الانتهاء يقع في الربع الثالث.



تدريب ١

ارسم في الوضع القياسي، ثم حدّد الربع أو المحور الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزوايا الآتية:

(١) 90° (٢) 140° (٣) 300°

ثانيًا: النسب المثلثية

دائرة الوحدة: هي الدائرة التي نصف قطرها وحدة واحدة، ومركزها نقطة الأصل.

مثال ٢:

في الوضع القياسي، إذا قطع ضلع الانتهاء زاوية قياسها دائرة الوحدة في النقطة $(-0.4, 0.3)$ ، فجد النسب المثلثية الستة؟

الحل

ضلع الانتهاء يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(س، ص) = (جناه، جاه)$

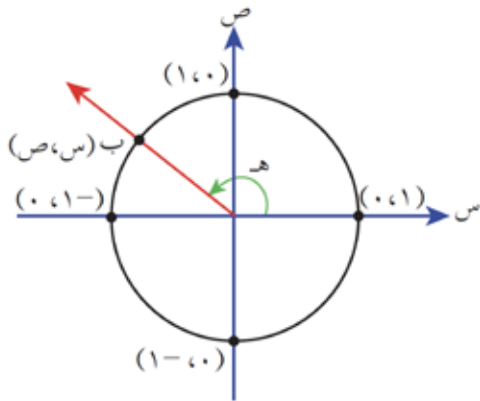
$$جناه = س = -0.4، جاه = ص = 0.3$$

$$ظاه = \frac{جاه}{جناه} = \frac{0.3}{-0.4} = -\frac{3}{4}$$

$$قاه = \frac{1}{جناه} = \frac{1}{-0.4} = -\frac{5}{2}$$

$$قتاه = \frac{1}{جاه} = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$$

$$ظناه = \frac{1}{ظاه} = -\frac{4}{3}$$



تدريب ٢

في الوضع القياسي، إذا قطع ضلع الانتهاء زاوية قياسها دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13})$ ، فجد النسب المثلثية الستة؟

جد النسب المثلثية للزاوية الرُّبعية 90° .

مثال ٣:

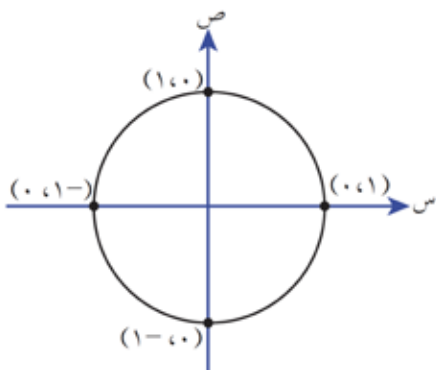
الحل

ضلع انتهاء الزاوية 90° يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(1, 0)$

$$جا 90^\circ = 1 \quad جتا 90^\circ = \text{صفر}$$

$$ظا 90^\circ = \frac{1}{\text{قيمة غير معرّفة}} \quad قتا 90^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$قا 90^\circ = \frac{1}{\text{قيمة غير معرّفة}} \quad ظنا 90^\circ = \frac{1}{\text{صفر}}$$



تدريب ٣

جد النسب المثلثية للزاوية الرُّبَعيَّة ١٨٠°.

مثال ٢:

إذا كان جاه = $-\frac{4}{5}$ ، حيث $180^\circ > \text{هـ} > 270^\circ$ ، جد جتاه، ظاه، قتاه.

الحل

جا^٢هـ + جتا^٢هـ = ١ معادلة دائرة الوحدة

$1 = \text{جتا}^2 \text{هـ} + \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ بالتعويض بقيمة جاه

$$\text{جتا}^2 \text{هـ} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\text{جتاه} = \pm \frac{3}{5} \quad \text{جذر الطرفين}$$

ضلع انتهاء الزاوية هـ يقع في الربع الثالث

جتاه = $-\frac{3}{5}$ لأن جتاه سالبة في الربع الثالث

$$\text{ظاه} = \frac{\text{جاه}}{\text{جتاه}} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{4}{3} \quad \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$$

البسط × مقلوب المقام

$$\text{قتاه} = \frac{1}{\text{جاه}} = \frac{1}{\frac{-4}{5}} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4} \quad \frac{5}{-4} = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{1}{\frac{-4}{5}}$$

تدريب ٢

إذا كان جتاه = -6 ، حيث $90^\circ > \text{هـ} > 180^\circ$ ، جد جاه، ظاه، قاه.

ثالثاً: النسب المثلثية للزوايا ضمن دورة كاملة:

دائرة الوحدة: هي الدائرة التي نصف قطرها وحدة واحدة، ومركزها نقطة الأصل.

مثال ٥:

جد قيمة كل من: جتا 120° ، ظا 225° ، قا 300° .

الحل:

ضلع انتهاء الزاوية 120° في الربع الثاني

$$\text{جتا } 120^\circ = \text{جتا } (180^\circ - 60^\circ)$$

$$= -\text{جتا } 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

ضلع انتهاء الزاوية 225° في الربع الثالث

$$\text{ظا } 225^\circ = \text{ظا } (180^\circ + 45^\circ) = \text{ظا } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

نراعي إشارة الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية.

ضلع انتهاء الزاوية 300° في الربع الرابع

$$\text{قا } 300^\circ = \text{قا } (360^\circ - 60^\circ) = \text{قا } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

تدريب ٢

جد قيمة كل من: جا 240° ، ظا 150° ، قتا 315° .

إثراء

في أي ربع يقع ضلع انتهاء الزاوية 390° ؟

جد قيمة جا 390° .

الفصل الثاني: تطبيقات المثلث

تعرفنا سابقاً أنّ مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طول قاعدته في ارتفاعه،
وستعرّف في هذا الدرس طريقة جديدة لإيجاد مساحة المثلث.
أولاً: مساحة المثلث بدلالة طولَي ضلعين فيه والزّاوية المحصورة بينهما:

مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولَي أيّ ضلعين فيه مضروباً في جيب الزّاوية المحصورة بينهما.

مثال ١:

جد مساحة المثلث أ ب ج إذا كان أ = ٨ سم ، ب = ١٣ سم ، وقياس $\angle ج = ٣٠^\circ$.

الحل:

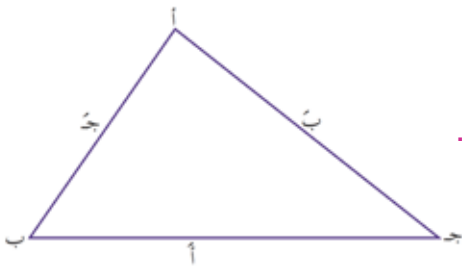
$$\begin{aligned} \text{مساحة المثلث أ ب ج} &= \frac{1}{2} \times أ \times ب \times \sin \angle ج \\ &= \frac{1}{2} \times ٨ \times ١٣ \times \sin ٣٠^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times ٨ \times ١٣ \times \frac{1}{2} = ٢٦ \text{ سم}^2 \end{aligned}$$

الزّاوية ج تقع بين الضلعين أ × ب

تدريب ٢

جد مساحة المثلث أ ب ج، إذا كان أ = ١٠ سم ، ب = ١٧ سم ، $\angle ج = ٨٠^\circ$. استعمل آلة حاسبة.

ثانياً: قانون الجيوب:



تؤخذ مثنى مثنى.

$$\frac{\sin أ}{أ} = \frac{\sin ب}{ب} = \frac{\sin ج}{ج}$$

انتبه: يمكن قلب النسب.

مثال ٢:

المثلث ل م ن ، فيه ل = ٧ سم ، ق ل = ٦٠° ، ق ل م = ٤٥° ،

جد : (١) ق ل ن (٢) ن

الحل:

مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

$$\text{ق ل ن} = ١٨٠ - (٦٠ + ٤٥)$$

$$= ١٨٠ - ١٠٥ = ٧٥$$

$$\frac{\text{جال}}{\text{ل}} = \frac{\text{جان}}{\text{ن}} \quad \text{قانون الجيوب}$$

$$\frac{\text{جا } ٦٠}{\text{ل}} = \frac{\text{جا } ٧٥}{\text{ن}}$$

$$\text{ن} = \frac{٧ \times \text{جا } ٧٥}{\text{جا } ٦٠} = ٨,٧ \text{ سم. استخدم آلة حاسبة.}$$

تدريب ٢

المثلث س ص ع ، فيه س = ٢٠ سم ، ق ل س = ١٥° ، ق ل ص = ١٣٠° ،

جد : (١) ق ل ع (٢) ع

ثالثاً: قانون جيوب التمام:

$$\text{في أيّ مثلث أ ب ج يكون: } \text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - ٢ \times \text{ب} \times \text{ج} \times \cos \text{أ}$$

مثال ٢:

المثلث س ص ع ، فيه س = ٥ سم ، ص = ٨ سم ، ق ل ع = ٦٠° ، جد ع .

الحل:

$$\text{ع}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2 - ٢ \times \text{س} \times \text{ص} \times \cos \text{ع}$$

$$= ٥^2 + ٨^2 - ٢ \times ٥ \times ٨ \times \cos ٦٠$$

$$= ٢٥ + ٦٤ - ٨٠ \times ٠,٥ = ٤٩$$

$$\text{ع} = \sqrt{٤٩} = ٧ \text{ سم}$$

تدريب ٣

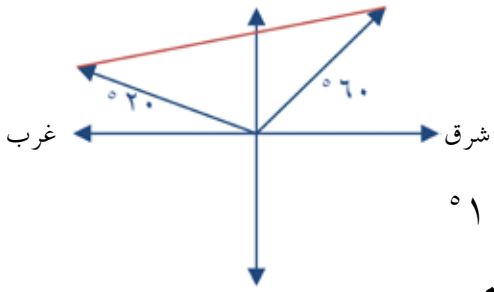
المثلث أ ب ج ، فيه أ = ٨ م ، ب = ١١ م ، ق ب ج = ١٢٠° ، جد: جـ (لأقرب جزء من عشرة).

مثال ٤:

انطلقت طائرتان معًا من مطار، الأولى بسرعة ٥ كم/ دقيقة، بزاوية ٦٠° شمال الشرق ،
والثانية بسرعة ٧ كم/ دقيقة، بزاوية ٢٠° شمال الغرب، جد البُعد بين الطائرتين بعد ١٠ دقائق
من انطلاقهما.

الحل:

المسافة بين الطائرتين: ف



$$\text{قياس الزاوية بين مسار الطائرتين} = 30^\circ + 70^\circ = 100^\circ$$

$$\text{المسافة التي قطعتها الطائرة الأولى} = 10 \times 5 = 50 \text{ كم}$$

$$\text{المسافة التي قطعتها الطائرة الثانية} = 10 \times 7 = 70 \text{ كم}$$

$$ف^2 = 2500 + 4900 - 2 \times 50 \times 70 \times \cos 100^\circ$$

$$= 2500 + 4900 - 7000 \times (-0.1736)$$

$$= 7400 + 1215.5 = 8615.5$$

$$ف = \sqrt{8615.5} = 92.8 \text{ كم تقريباً}$$

تدريب ٤

انطلقت سفينتان من ميناء معًا، الأولى بسرعة ٣٠ كم/ ساعة، بزاوية ٤٠° شرق الشمال، والثانية
بسرعة ٢٠ كم/ ساعة، بزاوية ٣٠° شرق الجنوب، جد البُعد بين السفينتين بعد ساعة من انطلاقهما.

إثراء

انطلقت طائرة حربية من قاعدة جوية بسرعة ٥ كم/ دقيقة بزاوية ٤٧° شمال الشرق؛ ليقتصد
هدفًا شرق القاعدة علمًا أنه يبعد ١٠ كم عن القاعدة، وبعد ٤ دقائق أطلقت الطائرة الحربية
صاروخًا بسرعة ١٠ كم/دقيقة على الهدف. بعد كم دقيقة يصيب الصاروخ هدفه؟

الفصل الأول: المستقيمات

أولاً: المستقيمات المتوازية والمتعامدة

سوف نتعلم في هذه الحصة العلاقة بين المستقيمات باستخدام الميل.
زاوية ميل المستقيم هي الزاوية المحصورة بين المستقيم والاتجاه الموجب لمحور السينات.

الميل = ظا هـ

$$\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \text{الميل}$$

المستقيمان متوازيان $\longleftrightarrow م_1 = م_2$

المستقيمان متعامدان $\longleftrightarrow م_1 \times م_2 = -1$

مثال ١:

إذا كان أ (١، -٤)، ب (٣، ١)، ج (١٣، -٣)، د (١٥، ٢)
أ) بين أن $\overline{أب} \parallel \overline{جـد}$ (ب) بين أن $\overline{أب} \perp \overline{بـجـ}$

الحل:

(أ)

$$م \text{ أ ب} = \frac{-4 - 1}{1 - 3} = \frac{5}{2}, م \text{ جـ د} = \frac{-3 - 13}{13 - 15} = \frac{5}{2}$$

$$م \text{ أ ب} = م \text{ جـ د} \leftarrow \overline{أب} \parallel \overline{جـد}$$

(ب)

$$م \text{ أ ب} = \frac{-4 - 1}{1 - 3} = \frac{5}{2}, م \text{ ب جـ} = \frac{1 - 3}{3 - 13} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$$

$$م \text{ أ ب} \times م \text{ ب جـ} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{5} = 1 \leftarrow \overline{أب} \perp \overline{بـجـ}$$

تدريب ١

إذا كان أ (٢، -٣)، ب (٤، ٠)، ج (١٠، -٤)، د (٧، -٦)

أ) بين أن $\overline{أب} \parallel \overline{جـد}$ (ب) بين أن $\overline{أب} \perp \overline{بـجـ}$

ثانيًا: البُعد بين نقطة ومستقيم

بُعد النّقطة (س_١ ، ص_١) عن المستقيم الذي معادلته أس + ب ص + ج = صفر يساوي

$$\left| \frac{أس_١ + ب ص_١ + ج}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} \right|$$

مثال ٢:

جد بُعد النّقطة (٣ ، ٥-) عن المستقيم الذي معادلته ٦س = ٨ ص - ٧

الحل:

انتبه، يجب أن تكون المعادلة بالصّورة العامّة أس + ب ص + ج = صفر.

معادلة المستقيم ٦س - ٨ ص + ٧ = صفر

أ = ٦ ، ب = -٨ ، ج = ٧ ، س_١ = ٣ ، ص_١ = ٥- .

بُعد النّقطة عن المستقيم = $\left| \frac{أس_١ + ب ص_١ + ج}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} \right|$ نعوض بالقانون

$$\left| \frac{٧ + ٥- \times -٨ - ٣ \times ٦}{\sqrt{٦^٢ + (-٨)^٢}} \right| =$$

$$\left| \frac{٧ + ٤٠ + ١٨}{\sqrt{٦٤ + ٦٤}} \right| =$$

$$٦,٥ = \frac{٦٥}{١٠} =$$

تدريب ١

جد بُعد النّقطة (-٤ ، ١) عن المستقيم الذي معادلته ٥س + ١٢ ص = ٧

جد البعد بين المستقيمين المتوازيين $ص = ٢س + ٣$ ، $ص = ٦س - ٣$ ، $١١ =$.

الحل:

نجد نقطة تقع على المستقيم $ص = ٢س + ٣$.

$$س = ٠ \text{ نجد } ص = ٣ + ٠ \times ٢ = ٣ \text{ النقطة } (٣, ٠)$$

نجد بُعد النقطة $(٣, ٠)$ عن المستقيم $ص = ٦س - ٣$ ، $١١ =$.

$$\text{بُعد النقطة عن المستقيم} = \left| \frac{١١ - ٣ \times ٦ - ٠ \times ٣}{\sqrt{٦^2 + (-٣)^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{١١ - ١٨ - ٠}{\sqrt{٣٦ + ٩}} \right| =$$

$$= \left| \frac{-٧}{\sqrt{٤٥}} \right| =$$

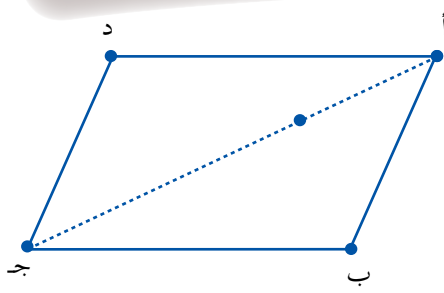
$$= \frac{٧}{\sqrt{٤٥}}$$

تدريب ٣

جد البعد بين المستقيمين المتوازيين $ص = ٣س + ٥$ ، $ص = ٦س - ٢$ ، $١١ =$.

إثراء

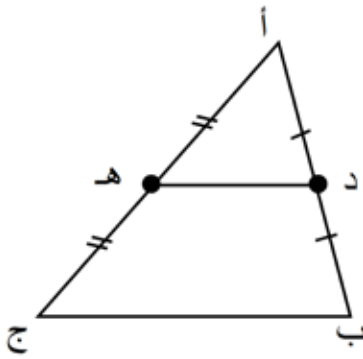
جد بُعد النقطة $(٧, -٣)$ عن محور السينات.



يبيّن الشكل متوازي أضلاع، نريد تحديد نقطة على القطر أ ج، بحيث يكون بعدها عن كل من ب و د متساويًا. كيف يمكننا القيام بذلك؟

الفصل الثاني: خصائص الأشكال الهندسية

أولاً: خصائص المثلث (١)



د منتصف أ ب ، هـ منتصف أ ج
 $د هـ = \frac{1}{2} ب ج$ ، $د هـ \parallel ب ج$

مبرهنة:

طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث، توازي الضلع الثالث.

مثال ١:

أ ب ج مثلث فيه ب (١، ٣)، ج (٧، -٥)، النقطتان د ، هـ منتصفا أ ب ، أ ج على الترتيب، جد د هـ .

الحل:

$$د هـ = \frac{1}{2} ب ج$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-5-3)^2 + (1-7)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{64 + 36}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{100}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 = 5 \text{ انتبه، إذا أعطى د ، هـ ويطلب طول ب ج ، فيكون ب ج } = 2 \times د هـ .$$

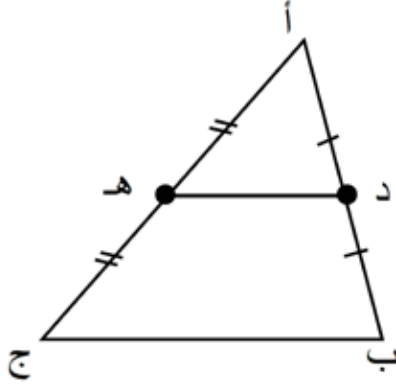
تدريب ٣

أ ب ج مثلث فيه ب (٣، ٧)، ج (٨، -٥)، النقطتان د ، هـ منتصفا أ ب ، أ ج

على الترتيب، جد د هـ .

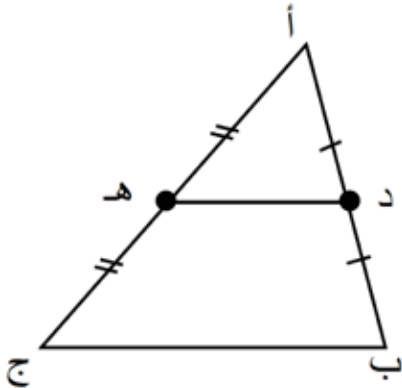
مثال ٢:

في الشكل المجاور: إذا كان $\angle ق = ٤٠^\circ$ ، $\angle ب = ٨٠^\circ$ ، جد $\angle أ$ هـ د .
الحل:



مجموع زوايا المثلث $= ١٨٠^\circ$
 $\angle ج = ١٨٠^\circ - (\angle أ + \angle ق) = ١٨٠^\circ - (٤٠^\circ + ٨٠^\circ) = ٦٠^\circ$
 د منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أج}$
 إذن $\overline{ده} \parallel \overline{بج}$
 $\angle أ هـ د = \angle ج = ٦٠^\circ$

تدريب ٢

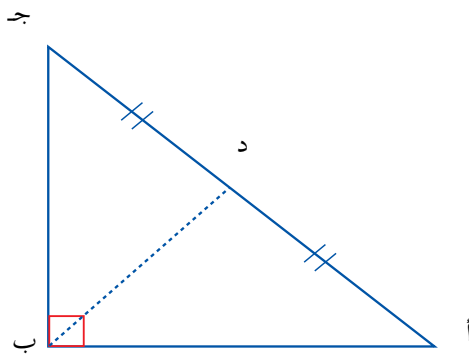


في الشكل المجاور: إذا كان $\angle ق = ٥٠^\circ$ ، $\angle ج = ٦٠^\circ$ ،
جد $\angle أ$ د هـ .

ثانيًا: خصائص المثلث (٢)

مبرهنة:

في المثلث القائم الزاوية، طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس الزاوية القائمة ومنتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر.



أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، د منتصف $\overline{أج}$ ، فإن $ب د = \frac{١}{٢} أ ج$

مثال ٣:

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، د منتصف أ جـ، فإذا كان أ(٣، ٢)، جـ(١-، ١-)، جد طول ب د .
انتبه، إذا أعطى ب، د ويطلب طول أ جـ، فيكون أ جـ = ٢ × ب د .

الحل:

$$ب د = \frac{1}{2} أ جـ$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{(3-1-)^2 + (2-1-)^2}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{16 + 9}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{25}$$

$$2,5 = 5 \times \frac{1}{2}$$

تدريب ٣

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، د منتصف أ جـ، فإذا كان أ(٤، ٣)، ب(٢-، ٥-)، جد طول ب د .

ثانيًا: خصائص المثلث (٢)

مبرهنة: قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

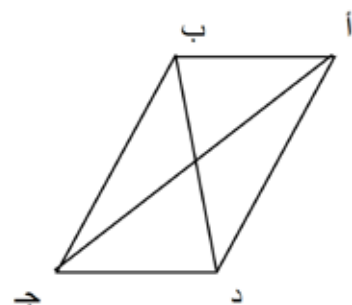
مثال ٤:

أ ب جـ د متوازي أضلاع، فيه أ(٣، ١-)، ب(٢، ٥)، جـ(٧، ٣)، ك نقطة تقاطع قطريه، جد إحداثيي النقطة ك

الحل: ك منتصف أ جـ. أ ب

$$ك = \left(\frac{7+3}{2}, \frac{3+1-}{2} \right) \text{ نقطة المنتصف}$$

$$ك = (٥، ١)$$



تدريب ٤ أ ب جـ د متوازي أضلاع، فيه أ(٢-، ١)، ب(٧، ٣)، جـ(٦، ٥)، م نقطة تقاطع قطريه، جد إحداثيي النقطة م .

الفصل الثالث: الهندسة الفضائية

أولاً: مسلّمات الهندسة الفضائية

تعريف:

النّقاط المستقيمة هي النّقاط الواقعة على مستقيم واحد.
النّقاط المستوية هي النّقاط الواقعة على مستوى واحد.

مسلّمات:

- (١) يوجد لأيّ نقطتين مختلفتين مستقيم واحد فقط يحويهما.
- (٢) إذا تقاطع مستقيمان مختلفان فإنّهما يتقاطعان في نقطة واحدة.
- (٣) يوجد لأيّ نقطة خارج مستقيم معلوم مستقيم واحد فقط يمرّ بها ويوازيه.
- (٤) يوجد لأيّ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة مستوى واحد فقط يحويها جميعها.
- (٥) إذا وقعت نقطتان في مستوى فإنّ المستقيم الذي يحويهما يقع بأكمله في المستوى.
- (٦) إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنّهما يتقاطعان في مستقيم.

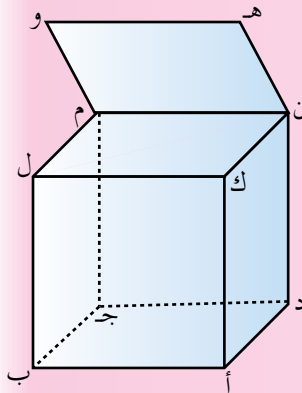
أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء

تعريف:

- (١) المستقيمان المتقاطعان هما المستقيمان اللذان يشتركان في نقطة واحدة فقط.
- (٢) المستقيمان المتوازيان هما المستقيمان اللذان يقعان في مستوى واحد ولا يتقاطعان.
- (٣) المستقيمان المتخالفان هما المستقيمان اللذان لا يوجد مستوى واحد يحويهما.

إثراء

في الشكل المجاور:



- سَمّ أربعة مستقيمات يوازي كلّ منها هـ و.....
- سَمّ أربعة مستقيمات يقطع كلّ منها ك.
- سَمّ أربعة مستقيمات يخالف كلّ منها ل ك.
- سَمّ خمسة مستقيمات يوازي كلّ منها المستوى ل ك ن.
- سَمّ المستوى الذي يقطع المستوى ل ك ن في المستقيم ل م
- سَمّ مستويين يتقاطعان بالمستقيم ج م
- ما العلاقة بين المستقيمين ن هـ ، ج ب . (متوازيان، متقاطعان، متخالفان)

الفصل الأول: الإحصاء

عمل المعلم فؤاد على اختبار شعبتي أ، ب من شعب الصف العاشر الأساسي في مادة الرياضيات، وأراد معرفة أيّ الشعبتين كان تحصيل الطلبة فيها أكثر تقارباً، فكيف نساعد على ذلك؟
أولاً: مقياس التشتت:

(١) المدى:

المدى = الحدّ الفعليّ الأعلى للفئة العليا - الحدّ الفعليّ الأدنى للفئة الدنيا

مثال ١:

احسب المدى للبيانات الآتية:

٧٤-٧٠	٦٩-٦٥	٦٤-٦٠	٥٩-٥٥	٥٤-٥٠	الكتلة
١	٢	٤	١	٢	التكرار

الحل:

الحدّ الفعليّ الأعلى للفئة العليا = $٧٤ + ٠,٥ = ٧٤,٥$

الحدّ الفعليّ الأدنى للفئة الدنيا = $٥٠ - ٠,٥ = ٤٩,٥$

المدى = $٧٤,٥ - ٤٩,٥ = ٢٥$

تدريب ١

احسب المدى للبيانات الآتية:

١٤-١٢	١١-٩	٨-٦	فئات الأعمار
٢٥	١٠	١٥	عدد الطلاب

(٢) الانحراف المعياري والتباين:

إذا كانت المشاهدات $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ تمثل مشاهدات في جدول تكراري، أو مراكز فئات التوزيع التكراري للبيانات، وكانت التكرارات المقابلة لها هي: $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ على التوالي، فإن:

$$\sqrt{\frac{\sum_{r=1}^n (s_r - \bar{s})^2 t_r}{n - 1}} = \text{الانحراف المعياري } \sigma$$

حيث n هو مجموع التكرارات، $\bar{s}$ هو المتوسط الحسابي.

مثال ٢:

يمثل الجدول الآتي أعمار ٥٠ طالبًا:

فئات الأعمار	٨-٦	١١-٩	١٤-١٢	١٧-١٥
عدد الطلاب	٨	١٢	٢٠	١٠

احسب: (١) الانحراف المعياري. (٢) التباين.

الحل:

لحساب الانحراف المعياري نكوّن جدولاً على النحو الآتي:

الفئات	عدد الطلبة	مراكز الفئات	$s \times t$	$s - \bar{s}$	$(s - \bar{s})^2$	$(s - \bar{s})^2 \times t$
٨-٦	٨	٧	٥٦	٥-	٢٥	٢٠٠
١١-٩	١٢	١٠	١٢٠	٢-	٤	٤٨
١٤-١٢	٢٠	١٣	٢٦٠	١	١	٢٠
١٧-١٥	١٠	١٦	١٦٠	٤	١٦	١٦٠
المجموع	٥٠		٥٩٦			٤٢٨

نجد المتوسط الحسابي بالتعويض في القانون:

$$\bar{s} = \frac{\sum s \times t}{\sum t} = \frac{596}{50} = 11.92 \approx 12$$

ثم نعوض بالقانون لإيجاد الانحراف المعياري

$$\sqrt{\frac{\sum_{r=1}^n (s_r - \bar{s})^2}{n-1}} = \sigma$$

$$\sqrt{\frac{428}{49}} = \sigma$$

$$\sigma = \sqrt{8.7} = 2.95 \quad \leftarrow (2) \text{ التباين } = \sigma^2 = 8.7$$

تدريب ٢

يمثل الجدول الآتي أعمار ٥٠ طالبًا.

فئات الأعمار	٩-٧	١٢-١٠	١٥-١٣	١٨-١٦
عدد الطلاب	٥	٢٠	١٥	١٠

احسب: (١) الانحراف المعياري. (٢) التباين.

ملاحظة:

أثر تعديل البيانات على مقاييس التشتت:

(١) مقاييس التشتت لا تتأثر بعملية جمع مقدار ثابت أو طرحه لكل مشاهدة.

(٢) مقاييس التشتت تتأثر بعملية ضرب المشاهدات.

* المدى والانحراف المعياري يُضرب بالقيمة المطلقة للثابت.

** التباين يُضرب بمربع الثابت.

الفصل الأول: الإحصاء

أولاً: قوانين الاحتمالات

إذا كان Ω الفضاء العيني لتجربة عشوائية، وكان $\Omega \supset C$ فإن احتمال وقوع الحادث C هو:

$$P(C) = \frac{\text{عدد عناصر الحادث } C}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{\text{عدد عناصر } C}{|\Omega|}$$

٦	٥	٤	٣	٢	١	
(٦، ١)	(٥، ١)	(٤، ١)	(٣، ١)	(٢، ١)	(١، ١)	١
					(١، ٢)	٢
					(١، ٣)	٣
					(١، ٤)	٤
					(١، ٥)	٥
					(١، ٦)	٦

كيف يمكنك الوصول للإجابات من الجدول؟

(١) ما عدد عناصر الفضاء العيني Ω ؟

(٢) ما عدد عناصر الحادث C ، حيث

C : ظهور عددين مجموعهما أقل من أو يساوي ٥ ؟

مثال ٣:

في تجربة إلقاء حجرَي نرد مختلفين مرّة واحدة، وتسجيل عدد النقاط الظاهرة على الوجه العلوي لكل منهما:

ح ١: ظهور عددين زوجيين متساويين.

ح ٢: ظهور عددين مجموعهما يساوي ٨.

احسب:

$$١. P(C_1), ٢. P(C_1 \cap C_2), ٣. P(\overline{C_1}), ٤. P(C_1 - C_2), ٥. P(C_1 \cup C_2)$$

الحل:

$$|\Omega| = 36$$

$$C_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$C_2 = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$$

$$P(C_1) = \frac{6}{36}, P(C_2) = \frac{5}{36}, P(C_1 \cap C_2) = \frac{1}{36}$$

المتمة

$$٣. P(\overline{C_1}) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36}$$

$$(٤) \quad L(H_1 - H_2) = L(H_1) - L(H_2 \cap H_1)$$

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{36} - \frac{5}{36} =$$

$$(٥) \quad L(H_1 \cup H_2) = L(H_1) + L(H_2) - L(H_2 \cap H_1)$$

$$\frac{7}{36} = \frac{1}{36} - \frac{5}{36} + \frac{3}{36} =$$

تدريب ٣

في تجربة إلقاء حجرَيّ نَزْد مختلفين مرّة واحدة، وتسجيل عدد النّقاط الظّاهرة على الوجه العلويّ لكلّ منهما:

ح_١: ظهور عددين فرديّين متساويين.

ح_٢: ظهور عددين مجموعهما أقلّ من أو يساوي ٥.

احسب:

$$١. L(H_1), ٢. L(H_2), ٣. L(H_1 - H_2), ٤. L(H_1 \cup H_2).$$

الحوادث المستقلة

إذا كان ح_١، ح_٢ حادثين مستقلّين، فإنّ $L(H_2 \cap H_1) = L(H_1) \times L(H_2)$

مثال ٤:

إذا كان ح_١، ح_٢ حادثين مستقلّين، وكان $L(H_1) = ٠,٤$ ، $L(H_2) = ٠,٦$

احسب: (١) $L(H_2 \cap H_1)$ (٢) $L(H_1 - H_2)$ (٣) $L(H_1 \cup H_2)$

الحل:

$$(١) \quad L(H_2 \cap H_1) = L(H_1) \times L(H_2)$$

$$٠,٢٤ = ٠,٦ \times ٠,٤ =$$

$$(٢) \quad L(H_1 - H_2) = L(H_1) - L(H_2 \cap H_1)$$

$$٠,٣٦ = ٠,٤ - ٠,٠٤ =$$

$$(٣) \quad L(H_1 \cup H_2) = L(H_1) + L(H_2) - L(H_2 \cap H_1)$$

$$٠,٧٦ = ٠,٤ + ٠,٦ - ٠,٢٤ =$$

تدريب ٤

إذا كان H_1, H_2 حادثين مستقلين، وكان $L(H_1) = 0,5$ ، $L(H_2) = 0,7$ ،
احسب: (١) $L(H_1 \cap H_2)$ (٢) $L(H_1 - H_2)$ (٣) $L(H_1 \cup H_2)$

الاحتمال المشروط

أيُّ أنَّهُ: إذا كان H_1, H_2 حادثين في الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية ما، وكان $L(H_2) \neq 0$ ، فإنَّ:

$$L(H_1/H_2) = \frac{L(H_1 \cap H_2)}{L(H_2)}$$

ونستنتج ممَّا سبق أنَّ: $L(H_1 \cap H_2) = L(H_1/H_2) \times L(H_2)$

مثال ٥:

إذا كان H_1, H_2 حادثين في الفضاء، وكان $L(H_1) = 0,6$ ، $L(H_2) = 0,7$ ، $L(H_1 \cap H_2) = 0,4$ ،
احسب: (١) $L(H_1/H_2)$ (٢) $L(H_2/H_1)$

الحل:

$$(١) L(H_1/H_2) = \frac{0,4}{0,7} = \frac{4}{7} \quad \text{تعويض مباشر في القانون}$$

$$(٢) L(H_2/H_1) = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3} \quad \text{تعويض مباشر في القانون}$$

تدريب ٥

إذا كان H_1, H_2 حادثين في الفضاء، وكان $L(H_1) = 0,5$ ، $L(H_2) = 0,4$ ، $L(H_1 \cap H_2) = 0,3$ ،
احسب: (١) $L(H_1/H_2)$ (٢) $L(H_2/H_1)$

إثراء

إذا كان $L(H_1) = 0,8$ ، $L(H_1/H_2) = 0,8$ ، $L(H_2/H_1) = 0,5$ ، احسب $L(H_1 \cup H_2)$.

الفصل الأول: تبديل العملة

قرّر محمد زيارة مكة المكرمة لأداء العمرة، وأخذ معه مبلغ ١٠٠٠ دينار أردني، وعندما وصل هناك أراد أن يشتري بعض الأغراض بالريال السعودي، كم المبلغ الذي سيحصل عليه محمد عند تبديل العملة؟

أولاً: التحويل من الدينار الأردني إلى العملات العربية أو الأجنبية:

مثال ١:

إذا علمت أنّ سعر (شراء - بيع) الجنيه المصري هو (٠,١٢٠٠ - ٠,١٢١٨) ديناراً أردنياً كم جنيهًا مصرياً يستطيع سعد أن يشتري بمبلغ ٤٠٠ دينار أردني؟

الحل:

$$\frac{400}{0,1218} = \text{المبلغ بالجنيه المصري} \quad \text{أي قسمة ٤٠٠ على ٠,١٢١٨}$$

$$= 3284,1 \text{ جنيهًا مصرياً}$$

تدريب ١

إذا علمت أنّ سعر (شراء - بيع) الين الياباني هو (٠,٦٨٨٥ - ٠,٦٩٤٣) ديناراً أردنياً. كم ينّا يابانيًا يستطيع صالح أن يشتري بمبلغ ٦٠٠ دينار أردني؟

ثانياً: التحويل من العملات العربية أو الأجنبية إلى عملة الدينار الأردني

مثال ٢:

عاد محمود من الكويت ومعه مبلغ ٧٠٠ دينار كويتي، وأراد تحويل المبلغ إلى دينار أردني، فكم ديناراً أردنياً يصبح معه؟

علمًا أنّ سعر (الشراء - البيع) الدينار الكويتي هو (٢,٤٢٥٤ - ٢,٤٣٢٣).

الحل:

$$\text{يشترى محمود الدينار الأردني}$$

$$\text{المبلغ بالدينار الأردني} = 700 \times 2,4254 = 1697,78 \text{ دينار أردني.}$$

تدريب ٣

عاد لؤي من مصر ومعه مبلغ ٢٠٠٠ جنيه مصري، وأراد تحويل المبلغ إلى دينار أردنيّ، فكم ديناراً أردنيّاً يصبح معه؟

علمًا أنّ سعر (الشراء-البيع) الدينار الجنيه المصري هو (٠,١٢٠٠ - ٠,١٢١٨).

الفصل الثاني: العمولة والربح والتخفيض

قيمة العمولة = صافي المبيعات $\times$ النسبة المئوية للعمولة
صافي المبيعات = جملة المبيعات - المبيعات المرتجعة

مثال ٣:

مندوب مبيعات في شركة يتقاضى ٦٪ من قيمة مبيعاته الشهرية، إذا قبض في أحد الأشهر مبلغ ١٦٢ ديناراً، فكم كان إجمالي مبيعاته؟ علمًا أنّ قيمة المبيعات المرتجعة كانت ٣٠٠ دينار.

الحل:

قيمة العمولة = صافي المبيعات $\times$ النسبة المئوية للعمولة

$$١٦٢ = \text{صافي المبيعات} \times ٦\%$$

$$١٦٢ = \text{صافي المبيعات} \times ٠,٠٦$$

$$\text{صافي المبيعات} = ١٦٢ \div ٠,٠٦ = ٢٧٠٠ \text{ دينار}$$

$$\text{جملة المبيعات} = \text{صافي المبيعات} + \text{المبيعات المرتجعة}$$

$$= ٢٧٠٠ + ٣٠٠ = ٣٠٠٠ \text{ دينار}$$

تدريب ٣

إذا كانت جملة المبيعات لمندوب مبيعات في شركة ألبسة هي ٤٥٠٠ دينار، وكانت البضاعة المرتجعة منها بقيمة ٣٠٠ دينار، إذا كانت نسبة عمولته ٥٪ من قيمة المبيعات، جد قيمة عمولته.

$$\begin{aligned} \text{هامش الربح} &= \text{المصاريف} + \text{الربح الصافي} \\ \text{سعر البيع} &= \text{التكلفة} + \text{هامش الربح} \\ \text{نسبة هامش الربح إلى التكلفة} &= (\text{هامش الربح} \div \text{التكلفة}) \times 100\% \end{aligned}$$

مثال ٤ :

اشترى تاجر أثاثًا بمبلغ ١٠٠٠٠ دينار، ودفع أجور نقل وتحميل وتنزيل ومصاريف أخرى بمبلغ ٥٠٠ دينار. إذا باع التاجر الأثاث بمبلغ ١٢٦٠٠ دينار، فكم مقدار الربح الصافي؟
الحل:

لإيجاد مقدار الربح، يجب الإجابة عن الأسئلة الآتية:

كم التكلفة؟

$$\text{التكلفة} = \text{سعر الأثاث} + \text{المصاريف}$$

$$= 10000 + 500 = 10500 \text{ دينار}$$

$$\text{الربح الصافي} = \text{سعر البيع} - \text{التكلفة}$$

$$= 12600 - 10500 = 2100 \text{ دينار}$$

تدريب ٤

اشترى تاجر بضاعة بمبلغ ٢٠٠٠٠ دينار، ودفع أجور نقل وتحميل وتنزيل ومصاريف أخرى بمبلغ ٥٠٠٠ دينار. إذا باع التاجر الأثاث بمبلغ ٣٢٣٠٠ دينار، فكم مقدار الربح الصافي؟

جملة المبلغ في حالة الربح المركب (بعد ن سنة) = المبلغ (١ + نسبة الربح) ^ن.

وبالرموز ج = م (١ + ف) ^ن.

ويكون الربح المركب = جملة المبلغ - المبلغ.

مثال ٥:

أودعت سعاد مبلغ ٣٠٠٠ دينار في أحد البنوك بحساب الربح المركب، وبفائدة نسبتها ٣٪ سنوياً، ولمدة ٧ سنوات، جد الآتي:
جملة المبلغ الذي قبضته سعاد في نهاية المدة.

الحل:

$$ج = م(١ + ف)^ن$$

$$= ٣٠٠٠(١ + ٠,٠٣)^٧ = ٣٦٨٩,٦ \text{ دينار}$$

تدريب ٣

أودعت ليلي مبلغ ٨٠٠٠ دينار في أحد البنوك بحساب الربح المركب، وبفائدة نسبتها ٤٪ سنوياً، ولمدة ٥ سنوات، جد جملة المبلغ الذي قبضته سعاد في نهاية المدة.

إثراء

اشترى لؤي قطعة أرض بمبلغ ٩٠٠٠ دينار، وبعد مُضيّ سنة كاملة على استخدامها باعها بمبلغ ٢٠٠٠٠ دينار، جد كلاً ممّا يأتي:
(١) قيمة التّغير في سعر الأرض.
(٢) نسبة التّغير في سعر الأرض.

النّسب المثلثية وحلّ المثلث

الفصل الأوّل: الزّوايا والنّسب المثلثية

تدريب ١:

- (١) ضلع الانتهاء يقع على محور الصادات الموجب.
- (٢) ضلع الانتهاء يقع في الربع الثاني.
- (٣) ضلع الانتهاء يقع في الربع الرابع.

تدريب ٢:

$$\begin{aligned} \text{جاه} - \frac{12}{13} &= \text{جتاه} = \frac{5}{13}, \text{ظاه} - \frac{1}{4} \\ \text{قتاه} - \frac{13}{12} &= \text{قاه} = \frac{13}{5}, \text{ظتاه} - \frac{5}{12} \end{aligned}$$

تدريب ٣:

$$\begin{aligned} \text{جا } 180^\circ &= \text{صفر}, \text{جتا } 180^\circ = -1, \text{ظا } 180^\circ = \text{صفر} \\ \text{قتا } 180^\circ &= \text{قيمة غير معرّفة}, \text{قا } 180^\circ = -1, \text{ظتا } 180^\circ = \text{قيمة غير معرّفة} \end{aligned}$$

تدريب ٤:

$$\text{جاه} = +8, \text{ظاه} = \frac{4}{3}, \text{قاه} = -\frac{5}{3}$$

تدريب ٥:

$$\text{جا } 240^\circ = -\frac{3}{2}, \text{ظا } 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{قتاه } 31^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

الفصل الثاني: تطبيقات المثلث

تدريب ١: ٨٣,٧ سم^٢ تقريبًا،

تدريب ٢:

$$(١) \text{ قه} = 35^\circ (٢) \text{ ع} = 44,3^\circ \text{ سم}$$

تدريب ٣: ١٦,٥ م تقريبًا

الهندسة التحليليّة والفضائيّة

الفصل الأوّل:

$$\text{تدريب ١: } \text{م} = \frac{3}{4}, \text{م} = \frac{2}{3}, \text{م} = \frac{2}{3}$$

تدريب ٢: البعد = ٢ وحدة،

$$\text{تدريب ٣: البعد} = \frac{20}{45}$$

الفصل الثاني:

تدريب ١: ٦,٥ ، تدريب ٢: ٧٠° ، تدريب ٣: ٥ ، تدريب ٤: (٣ ، ٢)

الإحصاء والاحتمالات

تدريب ١: ٥ تدريب ٢: (١) الانحراف المعياري: $\sqrt{\frac{250}{49}} = ٤$

(٢) التباين: $\frac{250}{49} = ٤^2$

الرياضيات المالية:

تدريب ١: ٨٦٤,٢ ينًا يابانيًا

تدريب ٢: ٢٤٠ دينارًا أردنيًا

تدريب ٣: صافي المبيعات = ٤٢٠٠ ، قيمة العمولة = ٢١٠ دينار

تدريب ٤: هامش الربح = ٧٣٠٠

تدريب ٥: ٩٧٣٣,٢ دينارًا

حل أسئلة الإثراء

(١)

هـ = ٣٩٠°

هـ = ٣٦٠° + ٣٠° ضلع الانتهاء يقع في الربع الأول بعد دورة كاملة.

جا ٣٩٠° = جا (٣٦٠° + ٣٠°)

= جا ٣٠° = ٠,٥

(٢)

ف^٢ = ١٠ + ٢٠ - ٢ × ١٠ × ٢٠ جتا ٤٧°

= ١٠٠ + ٤٠٠ - ٤٠٠ جتا ٤٧°

= ٢٧٢,٨ - ٥٠٠ = ٢٢٧,٢

ف = ٢٢٧,٢ = ١٥,١ كم

الزمن = المسافة ÷ السرعة

= ١٥,١ ÷ ١٠ = ١,٥١ دقيقة

(٣)

معادلة محور السينات هي ص = صفر

بُعد النقطة (٧، ٣) عن المستقيم ص + ١ ص + ٠ = ٠

$$\text{البُعد} = \left| \frac{٠ + ٣ - ١ \times ٧}{\sqrt{١ + ٢}} \right| = ٣ \text{ وحدات}$$

(٤)

(١) ن م، ك ل، د ج، أ ب

(٢) ن م، ن د، ن ك، ك ل، ك م، ن هـ

(٣) ن د، م ج، أ د، ب ج، هـ ن، و م

(٤) أ د، أ ب، ب ج، ج د، هـ و

(٥) المستوى ل م جـ

(٦) المستويان ن م جـ، ل م جـ

(٧) متخالفان

(٥)

$$ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) \times ل(ح_٢/ح_١)$$

$$٠,٤ = ٠,٥ \times ٠,٨ =$$

$$ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_٢) \times ل(ح_١/ح_٢)$$

$$٠,٤ = ل(ح_٢) \times ٠,٨ =$$

$$ل(ح_٢) = ٠,٤ \div ٠,٨ = ٠,٥ =$$

$$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$٠,٩ = ٠,٤ + ٠,٥ - ٠,٤ =$$

(٦)

قيمة التّغير = القيمة الحاليّة - القيمة السابقة

$$٢٠٠٠ - ٩٠٠٠ = ١١٠٠٠ \text{ دينار}$$

نسبة التّغير = قيمة التّغير ÷ القيمة السابقة × ١٠٠٪

$$= ١١٠٠٠ \div ٩٠٠٠ \times ١٠٠\% = ١٢٢,٢\%$$

تَمَّ بِحَمْدِ اللَّهِ تَعَالَى

