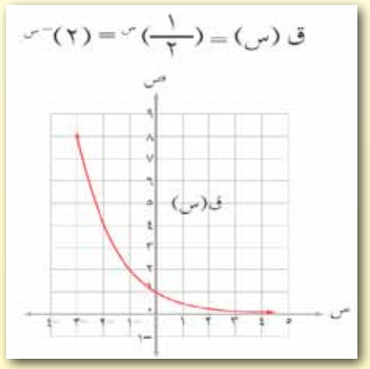
المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

مَلْزَمَةُ

الرياضيات

لِلصَّفِّ الْحَادي عَشَر

الْأَدَبِي وَالْفُنْدُقِي والسِّياحيِّ



مرحلة تعافي ٢

المطبعة الوطنية

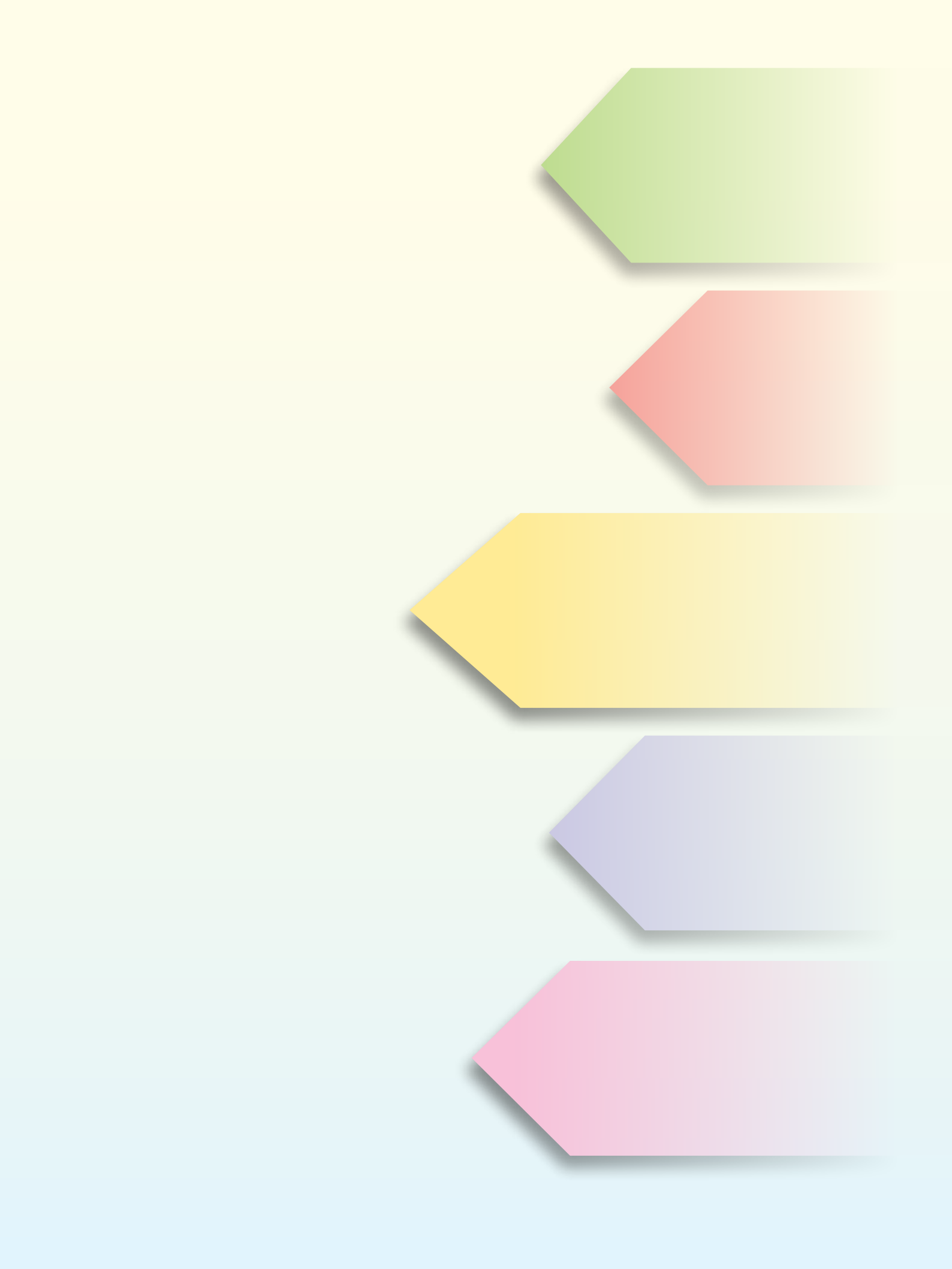
المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

مَلْزَمَةُ
الرياضيات

لِلصَّفِّ الْحَادي عَشَر

الْأَدَبِي وَالْفُنْدُقِي والسِّياحي

مرحلة تعافي ٢



قائمة المحتويات

الموضوع	الصفحة
الموضوع الأول: الاقتران الأسي ورسم الاقتران الأسي والمعادلة الأسية	٦
الموضوع الثاني: اللوغاريتمات	١٤
الموضوع الثالث: الاقتران اللوغاريتمي وخصائصه	٢١
الموضوع الرابع: المتتالية والمتسلسلة	٢٥
الموضوع الخامس: المتتالية الحسابية ومجموع المتسلسلة الحسابية	٣١
الموضوع السادس: المتتالية الهندسيّة ومجموع المتسلسلة الهندسيّة المنتهيّة وغير المنتهيّة	٣٨
ملحق (١): حلول التدريبات	٤٥
ملحق (٢): حل الإثراء	٥٤

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

يَسرُّنا أن نضعَ بين أيدي أبنائنا الطَّلبة هذه المَلْزَمَة كملخّص لأهمّ الأفكار والمفاهيم الرِّياضيّة البنائيّة والمنتهيّة للطَّلبة في الصَّف الأول ثانويّ الأدبيّ (بفروعه الأدبيّ والسَّياحي والفندقيّ) لتعويض الطّلبة عمّا فاتهم خلال جائحة كورونا، لإكساب الطلبة المعلومات، والمهارات، والخبرات بصورة ذاتيّة وبالاعتماد على نفسه، والتي تهدف إلى تحسين وتطوير شخصيّة المتعلّم، وقدراته، ومهاراته عن طريق ممارسة مجموعة من الأنشطة التّعليميّة بمفرده.

وتتضمّن هذه المَلزَمة المفاهيم التالية:

١- الاقتران الأسي ورسم الاقتران الأسي والمعادلة الأسية، ص ٦(للفرع الأدبيّ فقط).

٢- اللوغاريتمات، ص ١٤(للفرع الأدبي فقط).

٣- الاقتران اللوغاريتمي وخصائصه ص ٢١(للفرع الأدبي فقط).

٤- المتتالية والمتسلسلة ص ٢٥(الفروع الأدبي والسياحي والفندقي).

٥- المتتالية الحسابية ومجموع المتتالية الحسابيّة ص ٣١(الفروع الأدبيّ والسياحيّ والفندقيّ).

٦- المتتالية الهندسيّة ومجموع المتتالية الهندسيّة المنتهية وغير المنتهية ص ٣٨(للفرع الأدبي فقط).

الموضوع الأول

الاقتران الأسي ورسم الاقتران الأسي والمعادلة الأسية

قصّةُ مخترعُ الشّطرنج

(سيتا) هو اسم الرَّجل الهنديّ الذي اخترع لعبة الشَّطرنج في القرن السّادس ميلادي (قبل نحو ١٥٠٠ سنة).

عندما تعرّف ملك الهند في ذلك الوقت على اللعبة دُهش من ذكاء مخترعها، فدعا (سيتا) ليكافئه على اقتراحه، فلمّا حضر (سيتا) عند الملك أثنى عليه ثمّ قال له: اختر المكافأة التي تريدها وسوف أعطيك إيّاها.

قال (سيتا): أُريدك أن تُعطيني عن المربع الأوّل من مربعات الشَّطرنج حبّة قمح واحدة وعن المربع الثّاني حبّتين وعن المربع الثّالث أربعًا، وعن الرابع ثمانيّة، وهكذا تُعطيني عن كلِّ مربع ضعف عدد القَّمح عن المربع الذي قبله حتّى تنتهي مربعات الشّطرنج وعددها (٦٤) مربعًا.

تعجب الملك من طلبه ورأى أنها يسيرة .

فلمّا جاء المساء سأل الملك عن مكافأة (سيتا) هل أخذها أم لا فقيل له:إنّ خَزنة مخازن القَّمح استدعوا علماء رياضيّات ليحسبوا العدد المطلوب وأنّ الحساب لم ينته بعد، وفي صباح اليوم التَّالي جاء كبير علماء الرَّياضيات للملك وقال له: لقد حسبنا عدد الحبوب التي يريدها (سيتا)، وأنّ العدد المطلوب ضخم جدا ولا يوجد بخزائن الدنيا كلها هذا العدد من حبوب القمح.

فتعجب الملك وقال: وكم العدد المطلوب؟

فقالوا له: إن العدد المطلوب في المربع الأول حبّة واحدة

وفي المربع الثَّاني حبّتان، وفي المربع الثَّالث أربع حبّات

وفي الرابع ثماني حبّات، والخَّامس ست عشرة حبّة

والسَّادس اثنان وثلاثون حبة، والسَّابع أربع وستون حبة

والمربع الثَّامن مائة وثمانية وعشرون حبة والتَّاسع مائتان وستة

وخمسون والعَّاشر خمسمائة واثنا عشرة حبّة والحادي عشر ألف وأربعة وعشرون حبّة والثَّاني عشرة ألفان وثمانية وأربعون.

وتخيل عزيزي الطّالب المربع الثَّالث عشرة سيكون ضعف الثَّاني عشر حيث سيكون أربعة الآلف وست وتسعون فما بالك عزيزي الطالب بالمربع رقم أربعة وستون أن هذه الأرقام تتضاعف وفق اقتران أسي وهو ق(س) = ٢$^{س-١}$.

وَالْآنَ تعالُوا مَعَنَا لنتعَرَّفَ عَلَى الْإِقْترانِ الأسي وَالتَّمثيلِ الْبيانِيِّ لهُ كَما سنتعَرَّفُ علَى التَّمثيلِ الْبيانِيِّ للاقترانات الْأُسِيَّةَ وَأَيْضًا لِنتَعَرَّفُ عَلَى الْمُعادلَات الْأُسيَّة وطَرِيقَة حَلِّهَا.

الاقتران الأسي: يسمى الاقتران المكتوب بصورة ق (س) = أ × ب$^{هـ(س)}$ اقترانًا أسيًّا، حيث هـ (س) اقتران حقيقي، و أ ∋ ح ، و أ ≠ ٠ ، و ب > ٠ ، و ب ≠ ١، ويسمى ب أساس الاقتران.

أمّا **الاقتران الأسي الطبيعي**: يُسمى الاقتران على صورة ق (س) = أ (هـ)^{س} اقترانًا أسيًا طبيعيًّا حيث هـ العدد النيبيري، وهو عدد غير نسبي وقيمته التقريبية ٢,٧٢ .

مثال (١)

ميّز الإقترانات الأسّية والأسية الطّبيعية من غيرها فيما يلي:

١) ق(س)= ٥ (٤)^{س}

٢) هـ(س) = $|$س^{٣} − ٥$|$

٣) ع (س) = (س)^{٢٠} + ٣

٤) م (س) = (٣)^{٢س}

٥) ك (س) = (هـ)^{٣س}

الحل

نلاحظ أعزائي الطلبة أن الاقتران ق(س)= ٥(٤)^{س}، هو اقتران أسّي؛ لأن المتغيّر جاء بصورة الأس.

بينما الاقتران هـ(س) = $|$س^{٣} − ٥$|$، هو اقتران قيمة مطلقة وليس اقتران أسّي.

أمّا الاقتران ع (س) = (س)^{٢٠} + ٣، فهو اقتران من نوع كثير حدود فلم يأت المتغير بصورة أس.

أمّا الاقتران م (س) = (٣)^{٢س} ، فهو اقتران أسّي؛ لأن المتغير جاء في صورة الأس.

والاقتران هـ^{٣س} ، هو اقتران أسّي طبيعي لأنّ المتغير جاء بصورة أس والأسّاس هو العدد النيبيري هـ.

تدريب (١)

ميّز الاقترانات الأسّية والأسّية الطبّيعية من غيرها فيما يلي:

١) ق(س) = (٦)^{س}

٢) هـ(س) = $\sqrt{س^{٢}+١}$

٣) ل (س) = $\frac{س+١}{س}$ س ≠ ٠

٤) م (س) = هـ^{س} + ١

والآن دعونا لنتعرفَ على خصائص الاقتران الأسّي.

خصائص الاقتران الأسي

ق (س) = أ × ب^{س} ، ب ≠ ١ ، ب > ٠ ، أ > ٠ :

١) مجال ق هو مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)، ، أو (− ∞ ، ∞).

٢) مدى ق هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (ح$^{+}$)، أو (٠ ، ∞).

٤) منحنى ق يمر بالنقطة (٠ ، أ)؛ أي إن المقطع الصادي ص = أ.

٥) منحناه لا يقطع محور السينات.

٦) يكون ق متزايدًا إذا كانت ب > ١ .

٧) يكون ق متناقصًا إذا كانت ٠ < ب < ١ .

مثال (٢)

إذّا كان ق(س) = ٢^{س} جدْ ما يلي:

١) ق(٠) ، ق(١) ، ق (−١) ، ق (−٢)

٢) مثّل الاقتران بيانيًا.

٣) جدْ المجال والمدى.

٤) هلْ الاقتران متزايد أم متناقص.

٥) جدْ المقطع الصَّادي.

الحل

(١) لإيجاد ق (٠)، فإنّنا نعوض مكان س في الاقتران بالصفر = ٢^٠ = ١

ولإيجاد ق(١)، فإنّنا نعوض مكان س في الاقتران بالواحد = ٢^١ = ٢

ولإيجاد ق (−١) فإنّنا نعوض مكان س في الاقتران بالعدد سالب واحد = ٢^−١ = $\frac{١}{(٢)^{١}} = \frac{١}{٢}$

ولإيجاد ق (−٢) فإنّنا نعوض مكان س في الاقتران بالعدد سالب اثنين = ٢^−٢ = $\frac{١}{(٢)^{٢}} = \frac{١}{٤}$

(٢) للتمثيل البيانيّ عزيزيّ الطَّالب اتبع الخطوات التّالية:

- اختر قيما للمتغير س بحيث يسهل حساب قيم الاقتران ق (س) لها، ولتكن حول العدد صفر بمعنى أنّنا سنأخذ قيما قبل الصفر مثل −١ و −٢ و −٣ وقيما بعد الصفر مثل ١ و ٢ و٣ ثمّ نعوضها في الاقتران المعطى ونحسب النتيجة لنجد قيمة ص وهي نفسها ق (س).
- جدْ قيم ص المناظرة لقيم س المختارة بالتعويض في الاقتران ق.
- أنشئ الجدول التّالي:

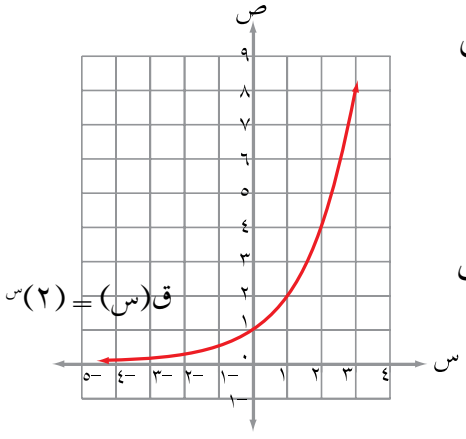
س	٣	٢	١	٠	−١	−٢	−٣
ق (س) =	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

لاحظ أنّنا اخترنا قيم س كما هي في الجدول، ثمَّ سنعوض قيمة س في الاقتران لتنتج قيمة ص

مثلا لو أخذنا س = ٣ سنعوضها في الاقتران فتصبح ص= ق(٣) = ٢^٣ =٨

لو أخذنا س = ٢ سنعوضها في الاقتران فتصبح ص= ق (٢) = ٢^٢ = ٤ وهكذا لكل قيم س

- نعيّن النقاط الموجودة في الجدول على المستوى الدّيكارتي ثمّ نصل النقاط بخط منحن أملس فتصبح كما يلي:



(٣) يكون المجال للاقتران (−∞، ∞) أمّا المدى(٠، ∞)

(٤) لتحديد فيما إذا كان الاقتران متزايد أم متناقص يمكنّنا من خلال قاعدة الاقتران مقارنتها مع الصورة العامّة

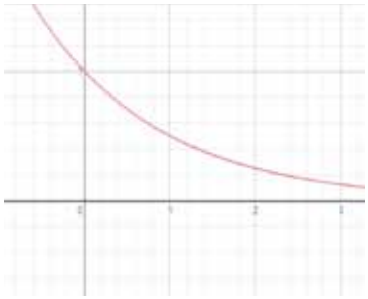
ق(س) = ٢^س وبالتّالي تكون قيمة ب = ٢

فهو اقتران متزايد كما ذكرنا في خصائص الاقتران الأسّي أنّه يكون متزايدا إذا كانت ب > ١

(٥) لتحديد المقطع الصَّادي فإنّنا نعوض س بصفر ونجد قيمة ص

ق (٠) = ص = ٢ ٠ = ١ أي أنّ الاقتران يقطع محور الصَّادات عند ص = ١

سنعرض لك عزيزيّ الطَّالب في المثال القادم اقترانا أسيًا متناقصًا



مثال (٣)

لاحظ عزيزيّ الطَّالب أنّ ق(س) = ٣ $^{-س}$ يظهر متناقصًا

حيث نلاحظ أنّه كلما زادت قيم س تتناقص قيم ق (س).

تدريب (٢)

إذّا كان ق(س) = ٣^{س} جد ما يلي:

١) مثل الاقتران بيانيًا.

٢) جد المجال والمدى.

٣) هل الاقتران متزايد أم متناقص.

٤) جد المقطع الصَّادي.

وبعد أن تعرّفنا عزيزيّ الطّالب على الاقتران الأسّي والتمثيل البيانيّ للاقتران الأسّي وخصائصه سنتعرّف الآن على المعادلة الأسّية.

المعادلة الآسية:

إنّ المعادلة الأسّية هي معادلة يظهر فيها المتغيّر بصورة أس وحلها يعني إيجاد قيم المتغيّر فيها علما بانّ حل المعادلة الأسية يعتمد على جعل الأسّاسات متساوية لكيّ نستطيع مساواة الأسّس.

مثلا: ٦^{٢س} = ٣٦ هذه تُمثل معادلة أسّية؛ لأنّ المتغيّر س جاء على صورة أس بينما ٣س = ٢٧ لا تُمثل معادلة أسّية؛ لأن المتغير لم يأت بصورة أس .

ولحل المعادلة الأسية يمكن استخدام التعميم التالي

إذا كانت أ$^{ق(س)}$ = أ$^{هـ(س)}$

فإن ق(س) = هـ (س) حيث أ ≠ ٠

وهذا يعني أنه إذا كانت الأساسات متساوية تتساوى الأسس

أما كحالة خاصة إذا كانت المعادلة الأسية = ١ فان هذا يعني أن الأس = ٠

مثال (٤)

حل المعادلة

$٢^{س} = ١٦$

الحل

حللنا العدد ١٦ لنحاول كتابته على شكل ٢ قوة عدد حيث أصبحت ال $١٦ = ٢^{٤}$

$٢^{س} = ٢^{٤}$

إذّن أصبحت الأسّاسات متساوية

إذّن نساوي الأسّس فتصبح

$س = ٤$

مثال (٥)

حل المعادلة

$٣ \, س^{-٣} = ٢٧$

الحل

$٣ \, س^{-٣} = ٣^{٣}$ لاحظ أنّنا كتبنا ال ٢٧ على شكل ٣ أس ٣

وبما أنّ الأسّاسيات متساوية إذّن تتساوى الأسّس

فيصبح

س−٣ = ٣، ثمّ نحل المعادلة حيث نضيف +٣ للطرفين

فتصبح

$س = ٦$

مثال (٦)

حل المعادلة $٧^{س^{٢}-س} = ٧^{٦}$

الحل

بما أنّ الأسّاسات متساوية نساوي الأسّس فيصبح:

$س^{٢} - س = ٦$

$س^{٢} - س - ٦ = ٠$

وبالتحليل ينتج

$(س-٣)(س+٢) = ٠$

ومنه :

أمّا $س-٣ = ٠$

وبالتّالي $س = ٣$

أو $س+٢ = ٠$

إذّن $س = -٢$

تدريب (٣)

حل كلّ معادلة من المعادلات التّالية:

(٢) $(٢)^{٣س} = ٦٤$

(٥) $٥^{س^{٢}-س} = ١$

وبذلك عزيزيّ الطّالب نكون قدْ وصلنا إلى نهاية الموضوع حيث سنتناول في الموضوع القادم اللوغاريتمات وكيفيّة حسابها وعلاقتها بالأسّس.

إثراء ١

إذّا كانت $ع = ٥٠٠ - ٥,٠ \times (٢)^{٠,٠٠٤ س}$ تُمثل معادلة السّعر – الطّلب حيث س:عدد الوحدات المبيعة من سلعة ما، ع : السّعر بالدينار للوحدة الواحدة، جدْ عدد الوحدات المبيعة إذّا كان السعر ٤٩٢ دينارا .

الموضوع الثاني

اللوغاريتمات

عزيزيّ الطَّالب سنتناولُ في هذا الدّرس موضوعًا جديدًا وهو اللوغاريتمات، ولكن قبل أنّ نتعرّفَ معًا على مفهوم اللوغاريتم سنتعرّف عن اللوغاريتمات خارج جدران المدرسة.

تمّ اختراع اللوغاريتم في القرن السَّادس عشر وذلك بهدف تبسيط العمليات الحسابيّة المُعقدة، ولكن رغم تطور الحواسيب مازالت التقنيّة تستخدمُ سواء على الصَّعيد الحسابي أو العقلي وتستخدمُ اللوغاريتمات في العديد من المجالات، فمثلا تستخدم في مقياس رختر لرصد الزّلازل كما أنّ دماغ الإنسان يعملُ بطريقةٍ لوغارتميّة لجميع الحواس كما تستخدم اللوغاريتمات لتسهيل قراءة الأعداد الكبيرة بالإضافة إلى استخدامِها في مقياس درجة الحموضة والعديد من المجالات في مجال الجيولوجيا وغيرها .

والآن لنتعرّفُ على اللوغاريتمات والعلاقة بين الأسّس واللوغاريتمات.

تعلّمت عزيزيّ الطّالب أنّ $٣^{٢} = ٨$ ، $٣^{٢} = ٩$ ويمكنّنا عزيزيّ الطّالب التعبير عن ذلك بالصورة **اللوغاريتمية** كما يلي :

عندما نكتب $٣^{٢} = ٨$ فإنّ هذه تُسمى الصورة الأسّية، وإذّا أردنا كتابتها بالصورة **اللوغاريتمية** تكتب هكذا **لو$_{٢}$ ٨ = ٣**

وإذا أردنا أن نعبر عن الصورة الأسّية $٣^{٢} = ٩$ فإنّها تُكتب كما يلي: **لو$_{٣}$ ٩ = ٢**

مثال (١)

عبّر عن كلّ ممّا يلي بالصورة اللوغارتمية:

١) $(٢)^{٤} = ١٦$

٢) $(٥)^{٠} = ١$

٣) $(٣)^{-٢} = \frac{١}{٩}$

٤) $(١٠)^{٢} = ١٠٠$

الحل

(١) لـو$_{٢}$ ١٦ = ٤ ⟵ $٢^{٤} = ١٦$ لتحويلها إلى الصورة اللوغارتمية وضعنا ال ١٦ داخل اللوغاريتم ٢ أساس للوغاريتم وبعد المساواة وضعنا الأس.

(٢) لـو$_{٥}$ ١ = ٠ ⟵ استخدمنا قاعدة أنّ لوغاريتم العدد ١ = صفر دائما.

(٣) لـو$_{٣}$ $\frac{١}{٩}$ = −٢ ⟵ استخدمنا قانون أنّ القسمة تُصبح طرح فتصبح المسألة

لـو$_{٣}$ ١ − لـو$_{٣}$ ٩ = ٠ − ٢ = −٢

(٤) لـو ١٠٠ = ٢ لاحظ هنا أنّ أساس اللوغاريتم يعتبر ١٠ في حالة عدم وجود أساس.

تدريب (١)

عبّر عن ما يلي بالصورة اللوغاريتمية :

١) $(٣)^{٢} = ٩$

٢) $(٥)^{٣} = ١٢٥$

٣) $(٢)^{٦} = ٦٤$

مثال (٢)

عبر عن ما يلي بالصورة الأسية:

لـو ٦٤ = ٦
٢

لو ٠,٠٠١ = -٣

لـو ٧ = ١
٧

لـو ٨ = $\frac{٣}{٢}$
٤

الحل

٢ ^{٦} = ٦٤ ⟵ وضعنا الأسّاس للوغاريتم وهو العدد (٢) أساس للصّورة الأسّية ووضعنا ناتج اللوغارتم وهو العدد (٦) أس للصّورة الأسّية ووضعنا ما داخل اللوغاريتم وهو العدد (٦٤) كنتيجة للصّورة الأسّية.

١٠ $^{-٣}$ = ٠،٠٠١ ⟵ وضعنا الأسّاس للوغاريتم وهو العدد (١٠) أساس للصّورة الأسّية ووضعنا ناتج اللوغارتم أس للصّورة الأسّية ووضعنا ما داخل اللوغارتم وهو العدد (٠,٠٠١) كنتيجة للصّورة الأسّية.

٧ ^{١} = ٧ ⟵ وضعنا الأسّاس للوغاريتم وهو العدد ٧ أساس للصّورة الأسّية ووضعنا ناتج اللوغارتم وهو العدد (١) أس للصّورة الأسّية ووضعنا ما داخل اللوغارتم وهو العدد ٧ كنتيجة للصّورة الأسّية.

٤ $^{\frac{٣}{٢}}$ = ٨ ⟵ وضعنا الأسّاس للوغاريتم وهو العدد ٤ أساس للصّورة الأسّية ووضعنا ناتج اللوغارتم وهو العدد($\frac{٣}{٢}$) أس للصّورة الأسّية ووضعنا ما داخل اللوغارتم وهو العدد (٨) كنتيجة للصّورة الأسّية.

تدريب (٢)

عبّر عن ما يلي بالصّورة الأسّية:

١) لـو$_{٢}$ ٤ = ٢

٢) لو ٠,٠١ = −٢

٣) لـو$_{٨}$ ٨ = ١

٤) لـو$_{٢}$ ٨ = ٣

مثال (٣)

جد قيمة ما يلي:

لـو$_{٢}$ ٨ ، لو ١٠٠ ، لـو$_{٣}$ ٢٧

الحل

لـو$_{٢}$ ٨ = ٣ ⟵ لأنّ العدد (٢) وهو أساس اللوغارتم نضربه في نفسه (٣) مرّات ليعطي(٨).

لو ١٠٠ = ٢ ⟵ لأنّ العدد (١٠) وهو أساس اللوغارتم نضربه في نفسه مرّتين ليعطي(١٠٠).

لـو$_{٣}$ ٢٧ = ٣ ⟵ لأنّ العدد (٣) وهو أساس اللوغارتم نضربه في نفسه (٣) مرّات ليعطي (٢٧).

دعونا نتعرّف على قوانين اللوغاريتمات والتي تُستخدم في التّبسيط ليسهل علينا الحساب:

القانون (١)

إذا كان (أ) عددًا حقيقيًّا موجبًا، و أ ≠ ١، فإن:

(١) لـو$_{أ}$ ١ = صفرًا

(٢) لـو$_{أ}$ أ = ١

مثال (٤)

لـو ١ = ٠
٧

لـو ٥ = ١
٥

القانون (٢)

إذا كان (أ) عددًا حقيقيًّا موجبًا، و أ ≠ ١، فإن:

لـو أ^ن = ن
أ

مثال (٥)

لـو ٤٦ = ٤
٦

القانون (٣)

إذّا كانت أ، ب، جـ أعدادًا حقيقيةً موجبةً، و جـ ≠ ١، فإن:

لـوجـ (أ × ب) = لـوجـ أ + لـوجـ ب

مثال (٦)

لـو ٣ (٩ × ٢٧) = لـو ٣ ٩ + لـو ٣ ٢٧ لاحظ إذّا كان داخل اللوغارتم ضرب تتحول إلى جمع

= ٢ + ٣ = ٥

القانون (٤)

إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا حقيقيةً موجبةً، و جـ ≠ ١، فإن:

لـوجـ (أ/ب) = لـوجـ أ − لـوجـ ب

مثال (٧)

لـو$_{٢}$ $\frac{٢}{٦٤}$ = لـو$_{٢}$ ٢ − لـو$_{٢}$ ٦٤ = ١ − ٦ = − ٥ لاحظ إذّا كان داخل اللوغارتم قسمة تتحول إلى طرح.

القانون (٥)

إذا كان أ، ب عددين حقيقيين موجبين، و ب ≠ ١، و(ن) عددًا حقيقيًّا، فإن:

لـو$_{ب}$ (أ)^{ن} = ن لـو$_{ب}$ أ

مثال (٨)

لـو$_{٢}$ (٣٢)^{٥} = ٥ × لـو$_{٢}$ ٣٢ = ٥ × ٥ = ٢٥

القانون (٦)

إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا حقيقيين موجبةً، و ب ≠ ١، و جـ ≠ ١، فإن:

لـو$_{ب}$ أ × لـو$_{جـ}$ ب = لـو$_{جـ}$ أ

مثال (٩)

لـو$_{٥}$ ٩ × لـو$_{٣}$ ٥ = لـو$_{٣}$ ٩ = ٢

مثال (١٠)

جدْ قيمة كل ممّا يلي: لـو$_{٤}$ ٦٢٥

لـو$_{٣}$ ($\frac{١}{٢٧}$)

لـو$_{٢٥}$ ١ + لو ١٠٠٠

لـوهـ٢

الحل

لـو ٦٢٥ = ٤ لان ٥ إذًا ضربناها ٤ مرّات تصبح ٦٢٥

لـو $_{٣}$ ($\frac{١}{٢٧}$) = لـو $_{٣}$ ١ – لـو $_{٣}$ ٢٧ = ٠ – ٣ = –٣ حوّلنا القسمة داخل اللوغاريتم إلى طرح ثمّ حسبنا ناتج كلّ لوغاريتم

لو $_{٥}$ ١ + لو ١٠٠٠ = ٠ + ٣ = ٣

لـو $_{هـ}$ هـ^{٢} = ٢ لـو $_{هـ}$ هـ = ٢ استخدمنا القانون (٥) أوّلاً حيث أخرجنا الأس خارج اللوغاريتم ثمّ القانون(١).

تدريب (٣)

جدْ ناتج ما يلي:

لـو $_{٥}$ (٢٥ × ٦٢٥)

لـو $_{٣}$ ($\frac{٢٧}{٨١}$) × لـو ١٠ × لـو $_{٥}$ ٢٥

لـو $_{٦}$ ٢ + لـو $_{٦}$ ٣

لـو ٦٠ – لـو ٦

وبذلك عزيزيّ الطَّالب نكونُ قدْ وصلنا إلى نهاية موضوع اللوغاريتمات حيثُ سنتناولُ في الموضوعِ القادمِ الاقترانَ اللوغارتمي وخصائصه .

إثراء ٢

إذّا كانت قوّة الأبصار المحددة (ل) لتلسكوب طول قطر عدسته ق تعطى بالعلاقة:

ل = ٨,٨ + ١,٥ لـو ق ، جدْ قيمة قوّة الأبصار المحدّدة لتلسكوب طول قطر عدسته ١٠٠ سم .

الموضوع الثالث

الاقتران اللوغارتمي وخصائصه

عزيزيّ الطَّالب تعلّمنا في الموضوع السَّابق كيفيّة حساب اللوغاريتمات وتبسيطها باستخدام قوانين اللوغاريتمات واليوم سنتناول موضوعا جديدًا مرتبطًا باللوغاريتمات وهو الاقتران اللوغارتمي وخصائص الاقتران اللوغارتمي حيثُ ستتعلّم عزيزيّ الطَّالب كيفيّة تمثيل الاقتران اللوغارتمي بيانيًا وأيضًا استقصاء خصائصه.

لنتعرّفُ على **الاقتران اللوغارتمي**

يسمى الاقتران ق (س) = لـو$_{ب}$ ل (س) اقترانًا لوغاريتميًّا إذًا :
كان ل (س) = ب$^{ق(س)}$، حيث ب ≠ ١، ب > ٠

مثال (١)

إنّ الاقترانات التّالية هي اقترانات لوغارتمية:

١) ق(س) = لـو$_{٢}$ س اقتران لوغاريتمي لأن ب = ٢ ، ب ≠ ١ ، ب > ٠ ، س = ٢$^{ق(س)}$

٢) هـ(س) = لـو$_{٣}$ (س + ١) اقتران لوغاريتمي؛ لأن ب= ٣ ، ب ≠ ١ ، ب > ٠ ، س+١ = ٣$^{هـ(س)}$

٣) ل (س) = لـو (٢ س – ١) اقتران لوغاريتمي؛ لأن ب = ١٠ ، ب ≠ ١ ، ب > ٠ ، ٢س – ١ = ١٠$^{ل(س)}$

مثال (٢)

الاقترانات التّالية فهيّ لا تُمثل اقترانات لوغارتميَة

١) ق(س) = ٢^س هو اقتران أسّي

٢) ك (س) = س + ١ هو اقتران خطيّ

مثال (٣)

إذّا كان ق(س) = لـو_٢ س

جدْ: ق (١)، ق (٨)، ق($\frac{١}{٢}$)

الحل

ق(١) = لـو_٢ ١ = ٠ عوّضنا العدد (١) مكان س داخل الاقتران ثمّ

استخدمنا قانون ١(ص ١١) لحساب الجواب.

ق(٨) = لـو_٢ ٨ = ٣ عوّضنا العدد ٨ مكان س داخل الاقتران ثمّ حسبنا

ق ($\frac{١}{٢}$) = لـو_٢ ١ – لـو_٢ ٢ عوّضنا العدد($\frac{١}{٢}$) مكان س داخل الاقتران ثمّ استخدمنا قانون ٤ (ص ١١)

= ٠ – ١ = ١–

تدريب (١)

إذّا كان ق(س) = لـو_٣ س جدْ

ق(١) ، ق(٣^٤) ، ق ($\frac{١}{٣}$)

مثال (٤)

إذا كان ق(س) = لـو$_{٢}$ س جد ما يلي:

١) مثّل الاقتران بيانيًا.

٢) جدْ المجال والمدى.

٣) هلْ الاقتران مُتزايدا أم متناقصا.

٤) جدْ المقطع السّيني.

الحل

للتمثيل البيانيّ نختار مجموعة من قيم س بحيث تكون قوى للأساس (٢)مثلا:

س = $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨

ثمّ نجدُّ قيم ق(س) للقيم المُختارة على النحو التّالي:

ق ($\frac{١}{٨}$) = لـو$_{٢}$ ($\frac{١}{٨}$) = لو$_{٢}$ ١ – لو$_{٢}$ ٨ عوّضنا قيمة س = $\frac{١}{٨}$ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب

= ٠ – ٣ = –٣

ق ($\frac{١}{٤}$) = لـو$_{٢}$ ($\frac{١}{٤}$) = لـو$_{٢}$ ١ – لـو$_{٢}$ ٤ عوّضنا قيمة س = $\frac{١}{٤}$ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب

= ٠ – ٢ = –٢

ق ($\frac{١}{٢}$) = لـو$_{٢}$ ($\frac{١}{٢}$) = لـو$_{٢}$ ١ – لـو$_{٢}$ ٢ عوّضنا قيمة س = $\frac{١}{٢}$ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب

= ٠ – ١ = –١

ق (١) = لـو$_{٢}$ ١ = ٠ عوّضنا قيمة س = ١ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب

ق (٢) = لـو$_{٢}$ ٢ = ١ عوّضنا قيمة س = ٢ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب

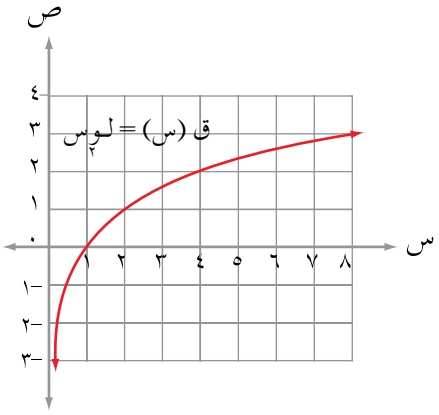
ق (٤) = لـو$_{٢}$ ٤ = ٢ عوّضنا قيمة س = ٤ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب

ق (٨) = لـو$_{٢}$ ٨ = ٣ عوّضنا قيمة س = ٨ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب

الآن عزيزي الطّالب ننشئ جدولًا يتضمّنُ قيم س، وقيم ق(س)، التي حسبناها كالتّالي، وضعنا مقابل س قيم س ومقابل ق(س) ناتج تعويض كل قيمة من قيم (س) من الخطوة السابقة:

س	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
ق (س)	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣

الآن سنعين الأزواج على المستوى البيانيّ من الجدول السابق للأزواج (س، ص)



مثال: (١، ٠)، (٢، ١)، وهكذا نكمل تعين كل النقاط ثمَّ نصل بينها بمنحنى أَملس كما يلي:

مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقةَ الموجبة.

المدى هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة الاقتران متزايد

نلاحظ عزيزي الطَّالب أن الاقتران يقطع محور السِّينات عِند س = ١

تدريب (٢)

ارسم منحنى الاقتران التَّالي: ق(س) = لـو٣ س ثمّ استقص خصائصه

سأقدم لك مساعدة

خذْ قِيم س التالية : ١، ٣، ٩،

وبذلك نكونُ قدْ وصلنا إلى نهاية الوحدة الأولى حيثُ سيكون موضوع وحدتنا القادمة المتتاليات والمتسلسلات.

إثراء ٣

إذّا علمت أنّ عدد البكتيريا (ع) بعد (ن) ساعة من بدء الانقسام يعطى بالعلاقة

ع(ن)= ١+ ٣,٦ ن

١) احسبْ عدد البكتيريا بعد (٨) ساعات.

٢) بعد كم ساعة يصبحُ عدد البكتيريا عن (٣٠٠٠).

الموضوع الرابع

المتتالية والمتسلسلة

أراد رجلٌ أنّ يحفرَ بئرًا فإذّا كانت تكلفة حفر المتر الأوّل (٥) دنانير وتكلفة المتر الثّاني (٧) دنانير وتكلفة حفر المتر الثّالث ٩ دنانير والمتر الرّابع (١١) دينارًا وهكّذا ...

هذا المثال عزيزيّ الطّالب يُمثلُ متتالية :

المتر	١	٢	٣	٤	
التّكلفة	٥	٧	٩	١١	

رُتبة المتر يُمثلُ مجال هذه المتتالية

والتكلفة تُمثل المدى.

لذلك يُمكنّنا أنّ نعرّفَ المتتالية كالآتي:

المتتالية: هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (تسمى في هذه الحالة متتالية غير منتهيّة) أو مجموعة جزئيّة من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة بصورة {١، ٢، ٣، ... ، ن} (تسمى في هذه الحالة متتالية منتهية).

وبما أن المتتالية هي اقتران، فإن لكل عدد صحيح موجب (ن) صورة واحدة فقط في المدى هي $ح_{ن}$ كما في الجدول الآتي:

رتبة الحد	ن	١	٢	٣	٤	
قيمة الحد	$ح_{ن}$	٥	٧	٩	١١	

مثال (١)

في المتتالية: ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ٣٥:

١) ما قيمة: $ح_{١}$، $ح_{٢}$، $ح_{٣}$؟

٢) ما رتبة الحد الذي قيمته ٢٠؟

٣) ما مجال الاقتران الدال على هذه المتتالية؟

٤) ما مدى الاقتران الدال على هذه المتتالية؟

الحل

تُقارَن المتتالية: ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ٣٥ بالمتتالية: $ح_{١}$، $ح_{٢}$، $ح_{٣}$، $ح_{٤}$، $ح_{٥}$، $ح_{٦}$، $ح_{٧}$،

فنحصل على:

$ح_{٢}$ = يُقابله العدد ١٠

$ح_{٥}$ = يُقابله العدد ٢٥

$ح_{٦}$ = يُقابله العدد ٣٠

رتبة الحد (٢٠) هي(٤)؛ لأنّ ترتيب الحد (٢٠) هو الرَّابع في المتتاليةِ.

مجال الاقتران الدال على المتتالية هو: {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}.

مدى الاقتران الدال على المتتالية هو: {٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ٣٥}.

تدريب (١)

في المتتالية ١، ٣، ٦، ١٠، ١٥، ٢١، ٢٨، ...

ما قيمة $ح_{٢}$، $ح_{٤}$؟

ما رتبة الحد الذي قيمته ٢٨ ؟

مثال (٢)

جدْ الحد العام للمتتالية : ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ٠ ٠ ٠ ٠

الحل

لاحظ أنّه يمكنّنا إعادة كتابة المتتالية كالتّالي:

٢ × ١ = ٢

٢ × ٢ = ٤

٢ × ٣ = ٦

٢ × ٤ = ٨

٢ × ٥ = ١٠

نلاحظ أنّ العدد (٢) وإشارة الضرب يتكرران في كل حد وأن الذي يتغير هي الأعداد (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥) وبالتّالي لو أردنا أنْ نعرّفَ الحد السَّادس سيكون (١٢) وهكّذا

وبالتّالي سيكون الحد العام $ح_{ن}$ = ٢ن

تدريب (٢)

جدْ الحد العام للمتتالية: ٥ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ...

مثال (٣)

اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي حدها العام: $ح_{ن} = \frac{ن}{ن^{٢} + ١}$

الحل

لإيجاد حدود المتتالية، يجب التعويض في قاعدة الحد العام:

$ح_{١} = \frac{١}{١ + (١)^{٢}} = \frac{١}{٢}$ لإيجاد الحدّ الأول نعوض (١) مكان (ن) في قاعدة الحد العام.

$ح_{٢} = \frac{٢}{١ + (٢)^{٢}} = \frac{٢}{٥}$ لإيجاد الحدّ الثّاني نعوض (٢) مكان (ن) في قاعدة الحد العام.

$ح_{٣} = \frac{٣}{١ + (٣)^{٢}} = \frac{٣}{١٠}$ لإيجاد الحدّ الثّالث نعوض (٣) مكان (ن) في قاعدة الحد العام.

$ح_{٤} = \frac{٤}{١ + (٤)^{٢}} = \frac{٤}{١٧}$ لإيجاد الحدّ الرّابع نعوض (٤) مكان (ن) في قاعدة الحد العام.

$ح_{٥} = \frac{٥}{١ + (٥)^{٢}} = \frac{٥}{٢٦}$ لإيجاد الحدّ الخامس نعوض (٥) مكان (ن) في قاعدة الحد العام.

وبالتّالي تصبح المتتالية

$$\frac{١}{٢} ، \frac{٢}{٥} ، \frac{٣}{١٠} ، \frac{٤}{١٧} ، \frac{٥}{٢٦}$$

تدريب (٣)

اكتبْ الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي حدها العام $ح_{ن} = ٥ن - ١$

لنتنقل عزيزيّ الطّالب إلى مفهوم المتسلسلة

المتسلسلة

تنشأ المتسلسلة من وضع إشارة + بدل الفاصلة فينشأ متسلسلة منتهيّة أو غير منتهيّة على سبيل المثال أنّ المتسلسلة: ١ +٣+٥+٧ +.... هي المتسلسلة المرتبطة بالمتتالية: ١، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...

ويمكن التّعبير عن المتسلسلة باستخدام رمز المجموع.

مثال (٤)

استخدم رمز المجموع Σ للتعبير عن المتسلسلة المرتبطة بالمتتالية: ٢ ، ٥ ، ١٠ ، ١٧ ، ٢٦ ، ٣٧

الحل

لاحظ أنّ عدد حدودها ستّة حدود إذن ن = ٦

أولًا نجدُّ الحد العام للمتتالية:

(١) ٢ = ١ + ٢

(٢) ٥ = ١ + ٢

(٣) ١٠ = ١ + ٢

نلاحظُ أنّ الأس ٢ والعدد واحد ثابتين وبذلك يكون الحد العام $ح_ن = ن^٢ + ١$

فتصبح المتسلسلة باستخدام رمز المجموع كالتالي:

$$\sum_{ن=١}^{٦} (ن^٢ + ١)$$

تدريب (٤)

استخدم رمز المجموع Σ للتعبير عن المتسلسلتين الآتيتين:

١) ٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ١٥ + ١٨

٢) −٢ + ٤ − ٦ + ٨ − ١٠ + ١٢ − ١٤

مثال (٥)

عبِّر عن المتسلسلة التّالية:

$$\sum_{ن=١}^{٥} (٤ - ن)$$ بكتابة حدودها.

الحل

كتابة حدود المتسلسلة يعني إيجاد مفكوك $\sum$:

$\sum_{ن=١}^{٥} (٤-ن) = (٤-١) + (٤-٢) + (٤-٣) + (٤-٤) + (٤-٥)$ عوّضنا مكان ن أوّل مرة العدد(١) ثمّ العدد (٢) ثم العدد (٣) ثمّ العدد(٤) ثم العدد (٥) توقّفنا عند العدد (٥)

$= ٣ + ٢ + ١ + ٠ + -١$ ؛ لأنّ عدد الحدود (٥).

تدريب (٥)

عبّر عن المتسلسلة التّالية بكتابة حدودها

١) $\sum_{ن=١}^{٤} (٣ن)$

٢) $\sum_{ن=١}^{\infty} (٣^{ن})$

وبذلك نكونُ انتهينا عزيزيّ الطّالب من مفهوميّ المتتالية والمتسلسلة حيثُ سنطرحُ عليك في الموضوعِ التالي المتتالية والمتسلسلة الحسابيّة.

إثراء ٤

مثل طلبة الصّف الثّامن الأردنّ في الدّراسة الدّولية للرياضيات والعلوم (Timss) في الأعوام ١٩٩٩م ، ٢٠٠٣ م ، ٢٠٠٧ م

١) هل تستطيع تحديد السّنة التي شارك فيها الأردنّ في هذه الدّراسة مرّة رابعة؟

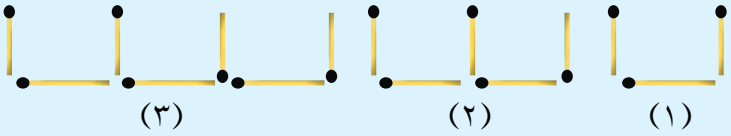
٢) إذا استمرت مشاركة الأردنّ في هذه الدّراسة، ففي أي سنة ستعقد الدراسة مرّة عاشرة؟

الموضوع الخامس

المتتالية الحسابية ومجموع المتسلسلة الحسابية

بعد أنْ استعرضنا عليك عزيزيّ الطَّالب مفهوم المتتالية والمتسلسلة سنعرضُ عليكم مفهومًا جديدًا وهو مفهوم المتتالية الحسابيّة ومجموع المتتالية الحسابيّة

تأمل الشكل التالي ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:



١) كم عدد أعواد الثقاب التي تم استخدامها لصنع الأشكال (١) (٢) (٣).

٢) ارسم الأشكال (٤)، (٥) ثم اكتب عدد الأعواد التي استخدمتها في كل شكل.

٣) كم عود ثقاب سليزمك لصنع الشكل رقم ١٠ (ثم اجب دون رسم).

لِنتعرَّفُ علَى مَفهُومِ الْمُتتالِيةِ الحسابِيَّةِ

المتتالية الحسابية:

هي متتالية يكون الفرق بين كل حد فيها ($ح_ن$) والحد السابق له مباشرة ($ح_{ن-١}$) مقدارًا ثابتًا يسمى أساس المتتالية، ويرمز إليه بالرمز (د)، ويرمز إلى الحد الأول فيها بالرمز (أ). فالمتتالية الحسابية هي: أ ، أ + د، أ + ٢د، أ + ٣د، . . . .

بكلمات أخرى هي المتتالية التي يكون فيها الحـدّ الثَّاني – الحدّ الأول = د

والحدّ الثَّالث – الحـدّ الثَّاني = د

والحدّ الرَّابع – الحدّ الثَّالث = د

حيث د ثابت يمثل أساس المتتالية الحسابية

مثال (١)

أي ممّا يلي نعدُّها متتالية حسابيّة:

١) ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١

٢) ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٠٠٠

الحل

في المتتالية الأولى

حـاصل طـرح الحدّين الثّـاني والأوّل = ٣ − ١ = ٢

وحـاصل طرح الحدّين الثّالث والثّـاني = ٥ − ٣ = ٢

وحـاصل طرح الحدّين الرّابـع والثّالث = ٧ − ٥ = ٢

وحـاصل طرح الحدّين الخامس والرّابع = ٩ − ٧ = ٢

وحاصل طرح الحدين السّادس والخامس = ١١ − ٩ = ٢

وبالتالي فإنّ حاصل طرح كلّ حدّين متتاليين يساوي مقدارًا ثابتًا

= ٢ وهو الشّرط لكي تعد المتتالية حسابيّة

في المتتالية الثانية : حاصل طرح الحدّين الثّاني والأوّل ٤ − ٢ = ٢

وحاصل طرح الحدين الثالث والثاني = ٨ − ٤ = ٤

وبالتالي فإنّ حاصل طرح كل حدّين متتاليين لا يساوي مقدارًا ثابتًا فهي ليست حسابيّة.

إذّا فرضنا بأن الحدّ الأوّل للمتتالية الحسابية

يساوي (أ)، وأنّ أساس المتتالية (د) ، وأن رتبة الحد (ن)، بالتالي يكون قانون الحدّ العام للمتتالية الحسابيّة هو:

$ح_{ن} = أ + (ن - ١) \times د$

حيثُ د ثابت يمثلُ أساس المتتالية الحسابيّة .

مثال (٢)

بيّن أنّ المتتالية التالية حسابيّة ثمّ جدْ حدّها العام

١٢، ٢٢، ٣٢، ٤٢، ٥٢، ...

الحل

بداية نطرح ٢٢−١٢ = ١٠

٣٢ − ٢٢ = ١٠

٤٢−٣٢ = ١٠ نلاحظ أنّ الفرق بين كلّ حدّين متتاليين يساوي مقدارًا ثابتًا = ١٠

إذن لدينا متتالية أساسها د = ١٠

وحدها الأوّل أ = ١٢

وبالتعويض في معادلة الحد العام

$ح_{ن} = أ + (ن−١) \times د$

$ح_{ن} = ١٢ + (ن−١) \times ١٠$

$ح_{ن} = ١٢ + ١٠(ن−١٠)$

$ح_{ن} = ١٠ ن + ٢$

تدريب (١)

جدْ الحدّ العام للمتتالية الحسابية

٢٤ ، ١٨ ، ١٢، ٦ ، ٠٠٠

مثال (٣)

ما الحدود المفقودة في المتتالية الحسابية

١١، ...، ...، ...، −١٧

الحل

نلاحظ أنّ لدينا الحدّان الأول والخامس

بالتعويض للحدّ الخامس بمعنى أنْ نعوض مكان (ن) ب ٥ في الحدّ العام،

وتعويض مكان $ح_ن$ ب (−١٧)

ينتج :

$ح_ن = أ + (ن - ١) \times د$

$ح_٥ = ١١ + (٥ - ١) \times د$

$-١٧ = ١١ + ٤ د$

$-١٧ - ١١ = ٤د$

$-٢٨ = ٤د$

بالقسمة على(٤) ينتج أن د = −٧

الآن نستطيع كتابة حدود المتتالية

الحدّ الأوّل ١١

الحدّ الثّاني ح٢ = ١١ + (٢−١) × −٧= ٤، لإيجاد الحدّ الثّاني

عوضنا قيمة أ = ١١و د= −٧ والعدد ٢ مكان ن لأنّه الحدّ الثّاني

الحدّ الثّالث ح٣ = ١١ + (٣−١) × −٧= −٣، لإيجاد الحدّ الثّالث

عوّضنا قيمة أ = ١١و د= −٧ والعدد ٣ مكان ن لأنّه الحد الثالث

الحدّ الرّابع ح٤ = ١١ + (٤−١) × −٧= −١٠، لإيجاد الحدّ الرّابع

عوّضنا قيمة أ = ١١و د= −٧ والعدد ٤ مكان ن، لأنّه الحدّ الرّابع

١١، ٤، −٣، −١٠، −١٧

مثال (٤)

جد عدد حدود المتتالية

١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٦٣

الحل

لدينا الحد الأول والأخير

أن رتبة الحد الأخير تُمثل عدد حدود المتتالية

أ= ١

د= ٢

بتطبيق قانون الحدّ العام للحدّ الأخير

$ح_{ن} = أ + (ن - ١) \times د$

$٦٣ = ١ + (ن-١) \times ٢$

$٦٣ = ١ + ٢ ن - ٢$

$٦٣ = -١ + ٢ن$

$٦٣+١ = ٢ن$

$٦٤ = ٢ن$

بالقسمة على ٢ ينتج ن = ٣٢

إذْن عدد حدود المتتالية ٣٢ حد.

تدريب (٢)

جدْ الحدّ العام للمتتالية الحسابية التي اساسها ٦ وحدها الأول ٣ ثم جدْ الحدّ الثلاثون.

ويُمكِنُكَ عَزِيزِيّ الطَّالِبِ أَنْ تَجِدَ مَجْمُوعُ الْمُتَسَلْسِلَةِ الْحِسَابِيَّةِ باستخدام القانون

$ج_{ن} = \frac{ن}{٢}(ح_{١} + ح_{ن})$

حيث ح١ تُمثل الحدّ الأوّل كما تعلم و $ح_{ن}$ تُمثلُ الحدّ الأخير و (ن) عدد الحدود

أو الصّورة الأخرى

$ج_{ن} = \frac{ن}{٢}(٢ أ + (ن - ١) \times د)$

حيث ن تُمثل عدد الحدود

أ الحد الأول

د الأسّاس للمتسلسلة

مثال (٥)

جد مجموع أول ٢٥ حدا من المتتالية الحسابية

$٤٠ + ٣٨ + ٣٦ + ٣٤ + ...$

الحل

الحد الأول أ = ٤٠

عدد الحدود ن = ٢٥

الأسّاس د = ٣٨ − ٤٠ = −٢

بالتعويض في القانون

$ج_{ن} = \frac{ن}{٢}(٢ أ + (ن - ١) \times د)$

$ج_{٢٥} = \frac{٢٥}{٢}(٤٠ \times ٢ + (٢٥ - ١) \times -٢)$

$= \frac{٢٥}{٢}(٨٠ - ٤٨)$

$= ٤٠٠$

تدريب (٣)

جد مجموع المتسلسلات الحسابية التالية:

١) ١ + ٢ + ٣ + ... + ١٠٠

٢) ٢١ + ١٩ + ١٧ + ... + −٢١

وهكذا انتهينا من المتتالية الحسابية وإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية وسنتعرفُ في الموضوعِ القادم على المتتالية الهندسيّة ومجموع المتسلسلة الهندسيّة المنتهيّة وغير المنتهيّة.

إثراء ٥

تأمل الشكل التالي ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:

١) كم عدد أعواد الثقاب التي تم استخدامها لصنع الأشكال (١) (٢) (٣).

٢) ارسم الأشكال (٤)، (٥) ثم اكتب عدد الأعواد التي استخدمتها في كل شكل.

٣) كم عود ثقاب سليزمك لصنع الشكل رقم ١٠ (ثم اجب دون رسم).

الموضوع السادس

المتتالية الهندسيّة ومجموع المتسلسلة الهندسيّة المنتهيّة وغير المنتهيّة

عزيزيّ الطُّالب تعلّمت في الموضوع السُّابق عن المتتالية الحسابيّة ومجموع المتسلسلة الحسابيّة وسنتعلّم اليوم نوعًا جديدًا من المتتاليات وهي المتتالية الهندسيّة المنتهية وغير المنتهية حيثُ ستتعلّم عزيزي الطُّالب إيجاد الحد العام لمتتالية هندسية، وإيجاد مجموع متسلسلة هندسية منتهية وغير منتهية.

إِذَنْ مَا هِي الْمُتتالِيةُ الْهَندَسِيَّةُ ؟

المتتالية الهندسية

متتالية تكون فيها النسبة بين كل حد إلى الحد السُّابق له مباشرة نسبة ثابتة تُسمى أساس المتتالية، ويُرمزُ إليها بالرمز ر، ويُرمز إلى الحد الأول فيها بالرمز أ. فالمتتالية الهندسية هي:

أ، أر، أر^{٢}، أر^{٣} ....

مثال (١)

أي ممّا يلي نعدّها متتالية هندسية:

٥، −٥، ٥، −٥، ٥، −٥

٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠

الحل

١) في المتتالية الأولى

حاصل قسمة الحد الثّاني على الأول

$$\frac{-٥}{٥} = -١$$

وحاصل قسمة الحد الثّالث على الثّاني

$$\frac{٥}{-٥} = -١$$

وحاصل قسمة الحد الرّابع على الثّالث

$$\frac{-٥}{٥} = -١$$

وحاصل قسمة الحد الخامس على الرّابع

$$\frac{٥}{-٥} = -١$$

وحاصل قسمة الحد السّادس على الخامس

$$\frac{-٥}{٥} = -١$$

وبالتالي فإنّ حاصل قسمة كلّ حد على الذي يسبقه يساوي مقدارًا ثابتًا

$= -١$ فهي تمثل متتالية هندسية

٢) في المتتالية الثانية

حاصل قسمة الحد الثّاني على الأول

$\frac{٤}{٢} = ٢$ وحاصل قسمة الحد الثالث على الثاني

$$\frac{٦}{٤} = ١,٥$$

وبالتّالي فهي لا تُمثلُ متتالية هندسيّة

تدريب (١)

أيُّ المتتاليات التالية هندسية

١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$، ...

٢، ٤، ١٠، ....

ولإيجاد الحد العام للمتتالية الهندسية

إذّا فرضنا بأنّ الحد الأول للمتتالية الهندسية يساوي (أ)، وأن أساس المتتالية (ر)، وأنّ رتبة الحد (ن)، بالتّالي يكون قانون الحد العام للمتتالية الهندسيّة هو :

$ح_{ن} = أ \times (ر)^{ن-١}$

مثال (٢)

جد الحد العام للمتتالية الهندسية

٥، ١٠، ٢٠، ٤٠، ٨٠، ...

ثمّ جدْ الحد العاشر

الحل

الحد الأول ٥

والأسّاس $= \frac{١٠}{٥} = ٢$

وبالتعويض في معادلة الحدّ العام

$ح_{ن} = أ \times (ر)^{ن-١}$

$ح_{ن} = ٥ \times (٢)^{ن-١}$

ولإيجاد الحدّ العاشر نعوض ن ب ١٠

فينتج:

$ح_{١٠} = ٥ \times (٢)^{١٠-١}$

$= ٥ \times ٥١٢ = ٢٥٦٠$

تدريب (٢)

جد الحد العام للمتتالية الهندسية

٣، ٩، ٢٧، ٨١ ، ..... ثم جد الحد السُّادس

مثال (٣)

ما عدد حدود المتتالية الهندسية

$٢٥، ٥، ١، ...، \frac{١}{٦٢٥}$

الحل

الحد الأول $أ = ٢٥$

الأسّاس $ر = \frac{٥}{٢٥} = \frac{١}{٥}$

الحد الأخير $ح_{ن} = \frac{١}{٦٢٥}$

بالتعويض في معادلة الحد العام

$ح_{ن} = أ \times (ر)^{ن-١}$

$\frac{١}{٦٢٥} = ٢٥ (\frac{١}{٥})^{ن-١}$

$(\frac{١}{٥})^{ن-١} = \frac{١}{٢٥ \times ٦٢٥}$

$(\frac{١}{٥})^{ن-١} = (\frac{١}{٥})^{٦}$

$ن - ١ = ٦$

$ن = ٧$

إذنْ عدد حدود المتتالية يساوي (٧) حدود

تدريب (٣)

جد عدد حدود المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٢ والثاني ٤ وحدها الأخير ٥١٢.

إذّا أردت عزيزيّ الطَّالب أنْ تجدَ مجموع المتسلسلة الهندسيّة

يُمكنك عزيزي الطّالب إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية باستخدام القانون التّالي:

$$ج_{ن} = \begin{cases} \frac{أ(ر^{ن}-١)}{ر-١} ، ر \neq ١ \\ أ ن \quad ، ر = ١ \end{cases}$$

حيثُ $ج_{ن}$ تُمثلُ المجموع و(أ) تُمثل الحدّ الأول و(ن) عدد الحدود و (ر) تمثلُ أساس المتسلسلة

مثال (٣)

جدْ مجموع المتسلسلة الهندسيّة التي حدها الأول ١٢٨ وأساسها $\frac{١}{٢}$ وعدد حدودها ٧

الحل

الحد الأول أ = ١٢٨

عدد الحدود ن = ٨

الأسّاس ر = $\frac{١}{٢}$

بالتعويض في القانون

$$ج_{ن} = \frac{أ(ر^{ن}-١)}{ر-١}$$

$$= \frac{١٢٨((\frac{١}{٢})^{٧}-١)}{\frac{١}{٢}-١}$$

$$= -٢(١-١٢٨) = ٢٥٤$$

التدريب (٤)

جدْ مجموع كلّ من المتسلسلات الهندسيّة التّالية:

١) حدّها الأوّل ٨١، وأساسها $-\frac{١}{٣}$، وعدد حدودها ٤.

٢) حدّها الأوّل ٤، وأساسها ١، وعدد حدودها ٥٠.

وإذّا كانتْ المتسلسلة الهندسيّة غير منتهية

إذّا كانت **المتسلسلةُ الهندسية غير منتهية** فيمكنّنا

أنْ نستخدم القانون التّالي:

$$ج_{ن} = \frac{أ}{١ - ر} \quad \text{حيث: } -١ < ر < ١$$

أمَّا إذّا كانت $|ر| \geq ١$ فإنه يتعذّر علينا إيجاد المجموع لها.

مثال (٣)

جد مجموع المتسلسلة الهندسية

$$٢٥ - ٥ + ١ - \frac{١}{٥} + \ldots$$

الحل

$$ر = \frac{-٥}{٢٥} = -\frac{١}{٥}$$

الآن $|-\frac{١}{٥}| < ١$

وبالتالي يمكن إيجاد مجموعها

$$ج = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢٥}{١ - (-\frac{١}{٥})}$$

$$= ٢٥ \times \frac{٥}{٦} = \frac{١٢٥}{٦}$$

التدريب (٥)

جد مجموع المتسلسلة

٢٠٠ + ١٠٠ + ٥٠ + ...

إثراء ٦

إذّا علمت أن كمية الماء التي تضخ من بئر هي (١ م^{٣}) في نهاية الساعة الأولى، و(٢ م^{٣}) في نهاية الساعة الثانية، و (٤ م^{٣}) في نهاية الساعة الثالثة، وهكذا، جد كمية الماء التي ستضخ من البئر بعد مرور ٨ ساعات إذا استمرت عمليّة الضخ بالنمط نفسه.

حلول التدريبات

أولا الاقتران الأسّي ورسم الاقتران الأسّي والمعادلة الأسّية

تدريب (١)

ميّز الاقترانات الأسّية والأسّية الطبّيعية من غيرها فيما يلي:

١) ق(س)= (٦)^{س} لأنّ المتغيّر س جاء بصورة أس

٢) هـ(س) = $\sqrt{س٢+١}$ ليس أسّي، لأنّ المتغيّر س لم يأت بصورة أس

٣) ل (س) = $\frac{١+س}{س}$ س ≠ ٠ ليس أسّي، لأنّ المتغيّر س لم يأت بصورة أس

٤) م (س) = هـ^{س} + ١ أسّي طبيعي، لأنّ المتغيّر س جاء في صورة أس وأساسه هـ العدد النيبيري

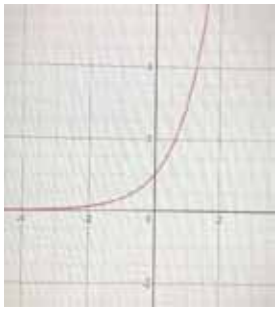
تدريب (٢)

للتمثيل البيانيّ عزيزيّ الطَّالب اتبع الخطوات التّالية:

- اختر قيما للمتغير س بحيث يسهل حساب قيم الاقتران ق (س) لها، ولتكن حول العدد صفر بمعنى أنّنا سنأخذ قيما قبل الصفر مثل −١ و −٢ و −٣ وقيما بعد الصفر مثل ١ و ٢ و٣ ثمّ نعوضها في الاقتران المعطى ونحسب النتيجة لنجد قيمة ص وهي نفسها ق (س).
- جدْ قيم ص المناظرة لقيم س المختارة بالتعويض في الاقتران ق.
- أنشئ الجدول التّالي:

س	٣	٢	١	٠	−١	−٢	−٣
ق (س) =	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

- لاحظ أنّنا اخترنا قيم س كما هي في الجدول، ثمَّ سنعوض قيمة س في الاقتران لتنتج قيمة ص
- مثلا لو أخذنا س = ٣ سنعوضها في الاقتران فتصبح ص= ق(٣) = $٣^{٣}$ =٢٧
- لو أخذنا س = ٢ سنعوضها في الاقتران فتصبح ص= ق (٢) = $٣^{٢}$ = ٩ وهكذا لكل قيم س
- نعيّن النقاط الموجودة في الجدول على المستوى الدّيكارتي ثمّ نصل النقاط بخط منحن أملس فتصبح كما يلي:



المجال (– ∞، ∞)

المدى(٠، ∞)

متزايد

المقطع الصَّادي ١

تدريب (٣)

حل كلّ معادلة من المعادلات التَّالية:

(٢)^{٣س} = ٦٤ كتبنا العدد ٦٤ على شكل (٢)^{٦}

(٢)^{٣س} = (٢)^{٦}

بما أن الأسّاسات (ت) متساوية إذنْ تتساوى الأسّس

فينتج ٣س= ٦

بالقسمة على ٣ إذن س = ٢

(٥) $^{س٢ - س}$ = ١ س= ٠ ، س = ١

تدريب (١)

$(٣)^{٢} = ٩$

لـو$_{٣}$ ٩ = ٢ وضعنا العدد ٩ الموجود بعد المساواة داخل اللوغارتم والأساس ٣ كأساس للوغاريتم والأس جواب للوغاريتم $(٥)^{٣} = ١٢٥$

لـو$_{٥}$ ١٢٥ = ٣ وضعنا العدد ١٢٥ الموجود بعد المساواة داخل اللوغارتم والأسّاس ٥ كأساس للوغاريتم والأس جواب للوغاريتم

$(٢)^{٦} = ٦٤$ وضعنا العدد ٦٤ الموجود بعد المساواة داخل اللوغارتم والأسّاس ٢ كأساس للوغاريتم والأس جواب للوغاريتم لـو$_{٢}$ ٦٤ = ٦

تدريب (٢)

لـو$_{٢}$ ٤ = ٢ بالصّور الأسّية $٢^{٢} = ٤$ وضعنا أساس اللوغارتم٢ كأساس للصّورة الأسّية وناتج اللوغارتم (٢) كأس للصورة الأسّية وداخل اللوغارتم (٤) هو نتيجة الصورة الأسّية.

لو ٠,٠١ = -٢ بالصور الأسّية $١٠^{-٢} = ٠,٠١$ وضعنا أساس اللوغارتم ١٠ كأساس للصّورة الأسّية وناتج اللوغارتم -٢ كأس للصورة الأسّية وداخل اللوغارتم ٠,٠١ هو نتيجة الصورة الأسّية.

لـو$_{٨}$ ٨= ١ بالصور الأسّية $٨^{١} = ٨$ وضعنا أساس اللوغارتم ٨ كأساس للصورة الأسّية وناتج اللوغارتم ١ كأس للصورة الأسّية وداخل اللوغاريتم ٨ هو نتيجة الصورة الأسّية.

لـو$_{٢}$ ٨ =٣ بالصور الأسية $٢^{٣} = ٨$ وضعنا أساس اللوغارتم ٢ كأساس للصورة الأسية وناتج اللوغاريتم ٣ كأس للصورة الأسّية وداخل اللوغاريتم ٨ هو نتيجة الصّورة الأسّية

تدريب (٣)

لـو$_{٥}$(٢٥ × ٦٢٥) = لـو$_{٥}$ ٢٥ + لـو$_{٥}$ ٦٢٥ = ٢ + ٤ = ٦ حوّلنا الضرب داخل اللوغارتم إلى جمع

لـو$_{٣}$ $\frac{٢٧}{٨١}$ × لو ١٠ × لو ٢٥ = (لـو$_{٣}$ ٢٧ − لـو$_{٣}$ ٨١) × ١ × لو ٢٥ = حوّلنا القسمة داخل اللوغاريتم إلى طرح

(٣ − ٤) × ١ × لو ٢٥ = − لو ٢٥

لـو$_{٦}$ ٢ + لـو$_{٦}$ ٣ = لـو$_{٦}$ (٢ × ٣) = لـو$_{٦}$ ٦ = ١ حوّلنا الجمع إلى ضرب

لو ٦٠ − لو ٦ = لو $\frac{٦٠}{٦}$ = لو ١٠ = ١ حوّلنا الطرح إلى قسمة

ثالثًا الاقتران اللوغارتمي وخصائصه

تدريب (١)

لـو$_{٣}$ ١ = ٠ قاعدة دائما لوغاريتم العدد ١ يساوي صفر

لـو$_{٣}$ ٣^{٤} = ٤ لو٣^{٣} = ٤ الأس خارج اللوغارتم ثمّ قاعدة ١ من قوانين اللوغاريتمات

لـو$_{٣}$ $\frac{١}{٣}$ = لـو$_{٣}$ ١ − لـو$_{٣}$ ٣ = ٠ − ١ = − ١ القسمة حوّلت إلى طرح

تدريب (٢)

الحل: للتمثيل البيانيّ نختار مجموعة من قيم س بحيث تكون قوى للأساس ٣ مثلا:

س = $\frac{١}{٢٧}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧

ثمّ نجد قيم ق(س) للقيم المختارة على النَّحو التالي:

ق ($\frac{١}{٢٧}$) = لـو$_{٣}$ ($\frac{١}{٢٧}$) = لـو$_{٣}$ ١ − لـو$_{٣}$ ٢٧ عوّضنا قيمة س = $\frac{١}{٢٧}$ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب = ٠ − ٣ = − ٣

ق ($\frac{١}{٩}$) = لـو$_{٣}$ ($\frac{١}{٩}$) = لـو$_{٣}$ ١ − لـو$_{٣}$ ٩ عوّضنا قيمة س = $\frac{١}{٩}$ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب = ٠ − ٢ = − ٢

ق $(\frac{1}{3})$ = لو$_3$ $(\frac{1}{3})$ = لو$_3$ ١ − لو$_3$ ٣ عوّضنا قيمة س = $\frac{1}{3}$ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب.

= ٠ − ١ = −١

ق (١) = لو$_3$ ١ = ٠ عوّضنا قيمة س = ١ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب.

ق (٣) = لو$_3$ ٣ = ١ عوّضنا قيمة س = ٣ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب.

ق (٩) = لو$_3$ ٩ = ٢ عوّضنا قيمة س = ٩ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب.

ق (٢٧) = لو$_3$ ٢٧ = ٣ عوّضنا قيمة س = ٢٧ في الاقتران مكان س ثمّ حسبنا الجواب.

الآن عزيزيّ الطَّالب ننشئ جدولًا يتضمنُ قيم س وقيم ق (س) التي حسبناها كالتّالي وضعنا مقابل س قيم س

ومقابل ق(س) ناتج تعويض كل قيمة من قيم س من الخطوة السابقة.

س	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	١	٣	٩	٢٧
ق (س)	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣

الْآنَ سنُعَيِّن الْأَزْوَاجَ عَلَى الْمُسْتَوَى الْبَيَانِيّ مِنَ الْجدْوَلِ السابق للأزواج (س، ص)

مثال: (١، ٠)، (٣، ١)، وهَكَذَا نُكملُ تعين كُلَّ النِّقَاطِ ثُمَّ نَصِلُ بَيْنهَا بِمُنحَنَى أَمْلَسُ كَمَا يَلِي:

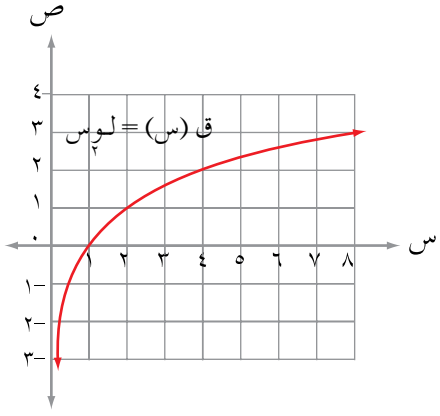
مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة الموجبة.

المدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية

الاقتران متزايد

نلاحظ عزيزيّ الطَّالب أنّ الاقتران يقطع محور السينات عند

س = ١



تدريب (١)

$ح_{٢} = ٣$ ، $ح_{٤} = ١٠$

رتبة الحدّ الذي قيمته ٢٨ هي ٧

تدريب (٢)

لاحظ أنّه يمكننا إعادة كتابة المتتالية كالتّالي:

$٥ \times ١ = ٥$

$٥ \times ٢ = ١٠$

$٥ \times ٣ = ١٥$

$٥ \times ٤ = ٢٠$

$٥ \times ٥ = ٢٥$

نلاحظ أنّ العدد (٥)، وإشارة الضرب يتكرران في كل حد وان الذي يتغير هي الأعداد: ١، ٢، ٣، ٤، ٥ ، وبالتالي لو أردنا أن نعرفَ الحد السَّادس سيكون (٣٠) وهكذا

وبالتالي سيكون الحد العام $ح_{ن} = ٥ ن$

تدريب (٣)

$ح_{١} = ٥ \times ١ - ١ = ٤$ $\quad$ $ح_{٣} = ٥ \times ٣ - ١ = ١٤$

$ح_{٢} = ٥ \times ٢ - ١ = ٩$ $\quad$ $ح_{٤} = ٥ \times ٤ - ١ = ١٩$

تدريب (٤)

$\sum_{ن=١}^{٦} (٣ن)$ أوجدنا الحدّ العام $ح_{ن} = ٣ن$ ، ن = ١ ، عدد الحدود(٦).

$\sum_{ن=١}^{٧} (-١)^{ن} \times ٢ن$ أوجدنا الحدّ العام $ح_{ن} = (-١)^{ن} \times ٢ن$ ، ن = ١ ، عدد الحدود (٧).

تدريب (٥)

١) ٣ × ١ + ٣ × ٢ + ٣ × ٣ + ٣ × ٤ + ٣ × ٥ + ٣ × ٦ + ٣ × ٧ عوّضنا مرّة ن ب ١ ومرّة ب ٢ ، وهكذا حتى العدد ٧

= ٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ١٥ + ١٨ + ٢١

٢) = $٣^{١}$ + $٣^{٢}$ + $٣^{٣}$ + $٣^{٤}$ +

٣ + ٩ + ٢٧ + ٨١ + ...

خامسًا المتتالية الحسابية ومجموع المتسلسلة الحسابية

تدريب (١)

الحد الأول : ٢٤ الأساس : −٦ عوّضنا القيم في قانون الحدّ العام $ح_{ن}$ = ٣٠ − ٦ن

تدريب (٢)

أ= ٣ ، د = ٦ بالتعويض في قانون الحد العام $ح_{ن}$ = ٣ + (ن−١) × ٦

$ح_{ن}$ = ٣ + ٦ن − ٦

$ح_{ن}$ = ٦ن − ٣

$ح_{٣٠}$ = ١٧٧

تدريب (٣)

الأولى عدد الحدود ٥٠

لإيجاد عدد الحدود نطبّق قانون الحد العام

١٠٠ = ١ + (ن − ١) × ١

ن = ١٠٠

تطبيق قانون مجموع المتسلسلة الحسابية

$ج = \frac{١٠٠}{٢} (١ + ١٠٠)$

$= ٥٠٥٠$

المجموع ٥٠٥٠

الثّانية عدد الحدود ٢٢

لإيجاد عدد الحدود نطبق قانون الحد العام

$-٢١ = ٢١ + (ن - ١) \times -٢$

$-٢١ = ٢١ - ٢ن + ٢$

$ن = ٢٢$

تطبيق قانون مجموع المتسلسلة الحسابيّة

$ج = \frac{٢٢}{٢} (٢١ + -٢١)$

المجموع = ٠

سادسًا المتتالية الهندسية ومجموع المتسلسلة الهندسية

تدريب (١)

١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$، ... هندسية لأنه عندما نقسم كل حد على الحد الذي قبله يعطي مقدارًا ثابتًا

٢، ٤، ٨ ... ليست هندسية لأنه عندما نقسم كل حد على الحد الذي قبله لا يعطي مقدارا ثابتا

تدريب (٢)

الحد العام $ح_ن = ٣ \times (٣)^{ن-١}$

الحد السَّادس $ح_٦ = ٣ \times (٣)^{٥-} = ١ = ٧٢٩$ عوّضنا في قانون الحدّ العام ن ب ٦

تدريب (٣)

الأساس = ٢

الحد الأول = ٢

بتطبيق قانون الحد العام $ح_{ن} = أ (ر)^{ن-١}$

$٥١٢ = ٢ (٢)^{ن-١}$

بالقسمة على ٢

$٢٥٦ = (٢)^{ن-١}$

$٢^{٨} = (٢)^{ن-١}$

ن−١ = ٨

ن= ٩

تدريب (٤)

مجموع الأولى: ١٢٠

مجموع الثانية: ٢٠٠

تدريب (٤)

مجموعها = ٢

ملحق (٢)

حل الإثراء

إثراء ١

إذّا كانت ع = ٥٠٠ – ٠,٥ × (٢)$^{٠,٠٠٤ س}$ تمثل معادلة السَّعر – الطَّلب حيث س :عدد الوحدات المبيعة من سلعة ما، ع : السَّعر بالدِّينار للوحدة الواحدة ، جد عدد الوحدات المبيعة إذّا كان السَّعر ٤٩٢ دينارًا .

لاحظ أن السَّعر ع = ٤٩٢، نعوض مكان ع ب ٤٩٢ ثم نحل المعادلة كالتالي :

٤٩٢ = ٥٠٠ – ٠,٥ × (٢)$^{٠,٠٠٤ س}$

طرح ٥٠٠ من الطَّرفين

٤٩٢ – ٥٠٠ = – ٠,٥ × (٢)$^{٠,٠٠٤ س}$

– ٨ = – ٠,٥ × (٢)$^{٠,٠٠٤ س}$

بقسمة الطَّرفين على – ٠,٥

نحصل على

١٦ = ٢$^{٠,٠٠٤ س}$

الآن نحل المعادلة الأسّية

٢^{٤} = ٢$^{٠,٠٠٤ س}$

الأساسات متساوية إذْن نساوي الأسّس

٤ = ٠,٠٠٤ س

بقسمة الطَّرفين على ٠,٠٠٤

ينتج س = ١٠٠٠

إثراء ٢

إذّا كانت قوّة الإبصار المحددة (ل) لتلسكوب طول قطر عدسته ق تعطى بالعلاقة:

ل = ٨,٨ + ١,٥ لوق، جد قيمة قوة الإبصار المحددة لتلسكوب طول قطر عدسته ١٠٠سم.

نعوض مكان ق التي تُمثل طول قطر عدسة التلسكوب ب ١٠٠ فينتج:

ل= ٨,٨ + ١,٥ لو ١٠٠

ل= ٨,٨ + ١,٥ × ٢

ل= ٨,٨ + ٣ = ١١,٨

إثراء ٣

إذا علمت أن عدد البكتيريا (ع) بعد (ن) ساعة من بدء الانقسام يعطى بالعلاقة

ع(ن)= ٣,٦ $^{ن+١}$

١) احسب عدد البكتيريا بعد ٨ ساعات.

٢) بعد كم ساعة يصبح عدد البكتيريا عن ٣٠٠٠.

(١) لإيجاد عدد البكتيريا بعد ٨ ساعات نعوّض مكان ن ب ٨

فتصبح ع = ٣,٦ ^{٨} + ١ ≈ ٢٨٢١٢

عدد البكتيريا = ٣٠٠٠

نعوض ٣٠٠٠ مكان ع ثم نجد ع

٣٠٠٠ = ٣,٦ $^{ن+١}$

طرح ١ من الطرفين تصبح المعادلة

٣٠٠٠ – ١ = ٣,٦ ^{ن}

٢٩٩٩ = ٣,٦ ^{ن}

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

لو ٢٩٩٩ = لو ٣,٦ ^{ن}

يمكننا إخراج ن خارج اللوغارتم باستخدام قوانين اللوغاريتمات

تصبح المعادلة لو ٢٩٩٩ = ن لو ٣,٦

بقسمة الطرفين على لو ٣,٦

$$\text{ن} \approx \frac{\text{لو ٢٩٩٩}}{\text{لو ٣,٦}} = ٦ \text{ ساعات}$$

إثراء ٤

مثل طلبة الصَّف الثَّامن الأردنّ في الدَّراسة الدَّولية للرياضيات والعلوم (Timss) في الأعوام ١٩٩٩م ، ٢٠٠٣ م ، ٢٠٠٧ م

١) هل تستطيع تحديد السَّنة التي شارك فيها الأردنّ في هذه الدَّراسة مرة رابعة ؟

٢) إذا استمرت مشاركة الأردن في هذه الدراسة ، ففي أي سنة ستعقد الدراسة مرة عاشرة ؟

يمكن كتابة المتتالية التي تمثل سنوات المشاركة بالشكل التالي:

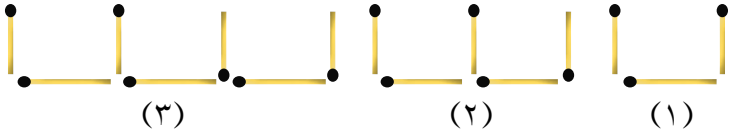
١٩٩٩ ، ٢٠٠٣ ، ٢٠٠٧ ، ٢٠١١

الحد الرَّابع هو ٢٠١١

إذا استمرت مشاركة الأردنّ ستعقد الدَّراسة في المرة العاشرة عام ٢٠٣٥

إثراء ٥

تأمل الشكل التالي ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:



١) كم عدد أعواد الثقاب التي تم استخدامها لصنع الأشكال (١) (٢) (٣).

٢) ارسم الأشكال (٤)، (٥) ثم اكتب عدد الأعواد التي استخدمتها في كل شكل.

٣) كم عود ثقاب سليزمك لصنع الشكل رقم ١٠ (ثم اجب دون رسم).

١) عدّد أعواد الثقاب التي استخدمها لصنع الشكل (١) تساوي (٣)، والشكل (٢) تساوي (٥)، والشكل (٣) تساوي (٧).

٢) الشَّكل الرَّابع

الشَّكل الخامس

٣) إن عدد أعواد الثقاب تُمثل متتالية حسابية حدها الأول ٣ والثاني ٥ والثالث ٧

٣ ، ٥ ، ٧ ، .....

حدها الأول ٣ وأساسها د = ٥ − ٣ = ٢

$ح_{ن} = أ + (ن-١) \times د$

$ح_{ن} = ٣ + (ن-١) \times ٢$

$ح_{ن} = ٣ + ٢ن^{-٢}$

$ح_{ن} = ١ + ٢ن$

سنحتاج معرفة الحد العاشر في المتتالية لذلك سنعوض ١٠ في قانون الحد العام مكان ن

$ح_{١٠} = ١ + ٢ \times ١٠ = ٢١$

إثراء ٦

إذّا علمت أن كمية الماء التي تضخ من بئر هي (١ م^{٣}) في نهاية الساعة الأولى، و(٢ م^{٣}) في نهاية الساعة الثّانية، و (٤ م^{٣}) في نهاية الساعة الثّالثة، وهكذا، جدْ كمية الماء التي ستضخ من البئر بعد مرور (٨) ساعات إذا استمرت عملية الضخ بالنمط نفسه.

نلاحظ أن كمية الضَّخ تمثل متتالية هندسية عدد حدودها (٨)حدود كالتالي:

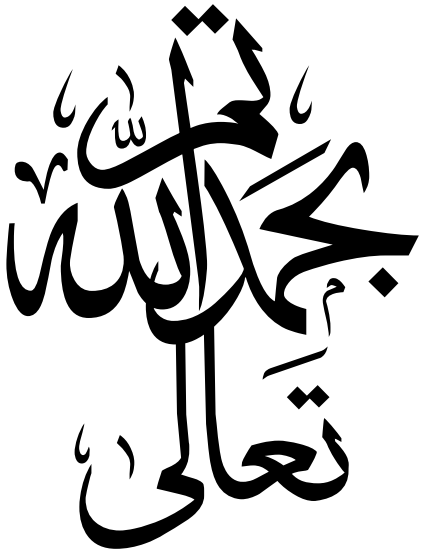
١ ، ٢ ، ٤ ، ...

الحد الأول ١

الأساس ر $= \frac{٤}{٢} = ٢$

مجموع أول ثمانية حدود من المتسلسلة يساوي

$ج_{٨} = ج_{ن} = \frac{١(٢)^{٨}-١)}{٢-١} = ٢٥٥$ م^{٣}


تم بحمد الله تعالى